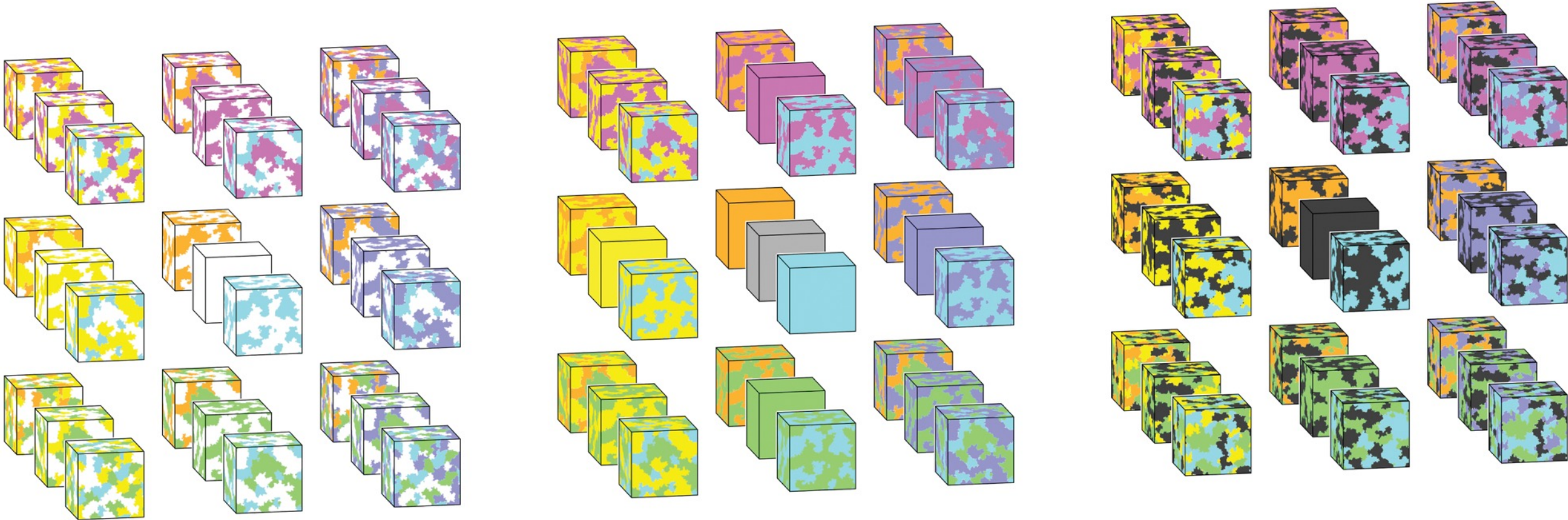


RAKENNETAAN
MATEMAATTISIA ESINEITÄ:
HINTONIN PALIKAT

LUMATIKKA 2019
Taneli Luotoniemi



UUSI TULKINTA CHARLES HOWARD HINTONIN TESSERAKTIN VISUALISOIMISEEN TARKOITETUISTA KUUTIOISTA

Charles Howard Hinton julkaisi vuosina 1884–1907 joukon matemaattis-filosofisia kirjoituksia, joiden tarkoitus oli neljännen tilaulottuvuuden popularisointi. Kirjoissaan *New Era of Thought* (1888) ja *The Fourth Dimension* (1901) Hinton kuvaili kuinka kuution neliulotteinen vastine – tesseracti, voidaan viipaloida osiin ja esittää kuutioista koottuina poikkileikkauksina meidän kolmiulotteisessa avaruudessamme.

Hintonin tekstit saivat laajaa vastakaikua 1900-luvun alkupuolella, erityisesti taiteilijoiden ja mystikkojen piireissä. Neliulotteisen ajattelun oli määrä edistää ihmiskunnan moraalista kehitystä kunkin oman näkökulman ulkopuolelle asettumisen kautta.

Tähän tarkoitukseen Hinton suunnitteli värillisten kuutiopalikoiden käsittelyyn perustuvan itseopiskelujärjestelmän, jonka lähtökohta oli $3 \times 3 \times 3 \times 3$ kokoinen tesseracti. Palikoista voitiin koota erilaisia poikkileikkauksia tesseractista, sekä havainnollistaa mm. kuinka tesseractin voi keikahtaa ympäri yhden tahkonsa varassa. Hinton opetti palikoiden käytön nuorelle kälyllensä Alicia Boole Stottille, joka saavutti kyvyn neliulotteisten rakenteiden kuvitteluun ja teki myöhemmin huomionarvoisia lisäyksiä tunnettujen neliulotteisten kappaleiden luetteloon. Jälkeenpäin palikoiden on huhuttu aiheuttavan jopa pakkomielteisiä piirteinä käyttäjissään.

UUSI TULKINTA CHARLES HOWARD HINTONIN TESSERAKTIN VISUALISOIMISEEN TARKOITETUISTA KUUTIOISTA

Vaikka Hintonin vaikutuksesta kulttuurihistoriaan on kirjoitettu paljon, ovat itse kuutiot ja niillä tehtävät harjoitukset jääneet vähemmälle huomiolle. Tässä materiaalissa esitellään Hintonin palikkasarjasta uusi versio joka koostuu 81 monivärisestä osasta, sekä käytetään sitä tesseractin poikkileikkauksien visualisointiin.

Työskentele tehtävien parissa valitsemallasi laajuudella, ja dokumentoi työskentelysi valokuvin, videoin, skannatuin piirroksin, tms.

KÄSITTEISTÖÄ WIKIPEDIASSA (ENG):

Neliulotteinen avaruus: https://en.wikipedia.org/wiki/Four-dimensional_space

Tesseractti: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract>

Charles Howard Hinton: https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Howard_Hinton

Alicia Boole Stott: https://en.wikipedia.org/wiki/Alicia_Boole_Stott

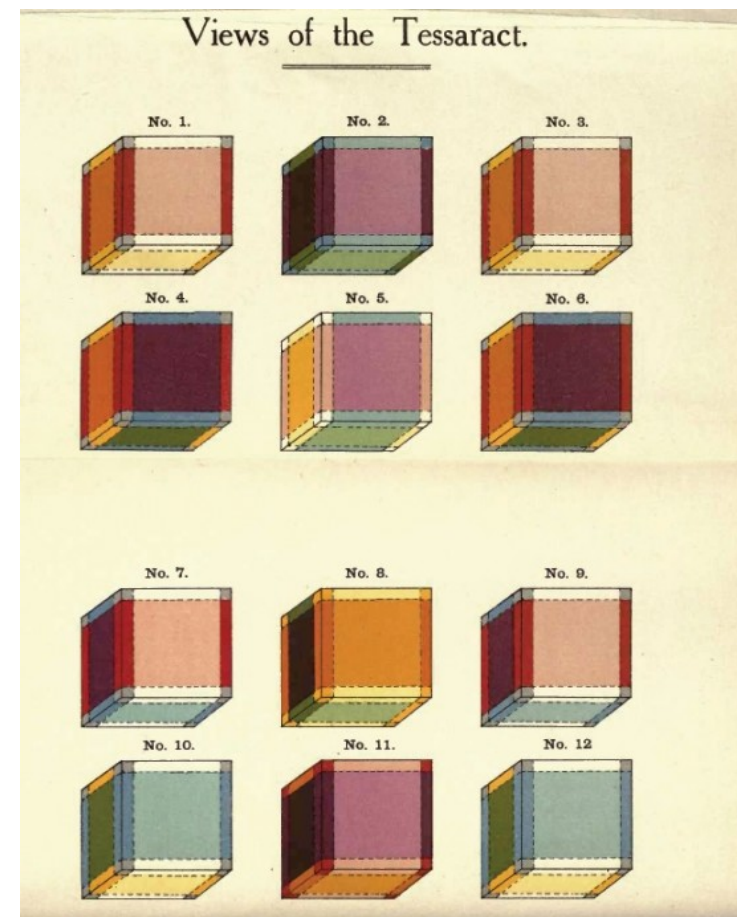


Charles Howard Hinton, (1853–1907)

HYPERAVARUUDEN KANSANTAJUUSTAJA

Brittiläinen matemaatikko Charles Howard Hinton julkaisi vuosina 1884–1907 joukon geometris-filosofisia kirjoituksia, joiden tarkoitus oli neljännen tilaulottuvuuden popularisointi. Hintonin tekstit saivat laajaa vastakaikua 1900-luvun alkupuolella, erityisesti taiteilijoiden ja mystikkojen piireissä.

Hintonin ajattelun keskiössä oli kuutioista koostuva neliulotteisen geometrian itseopiskelujärjestelmä, johon kuuluvat värilliset palikat olivat tilattavissa hänen kustantajaltaan.



The Fourth Dimension -kirjan etusivu (1901)

ENSIMMÄINEN OPETUSLAPSI

Hinton oli säännöllinen vieras Mary Everest Boolean taloudessa (Maryn puoliso George oli kuuluisa Boolean algebrastaan), ja käytti tämän tytärtä Aliciaa koekaniinia palikkajärjestelmänstä opettamisessa.

Alicia saavuttikin erinomaisen neliulotteisen kuvittelukyvyn, ja todisti myöhemmin itsenäisesti erilaisten hyperavaruuden säännöllisten kappaleiden matemaattisen olemassaolon sekä valmisti pahvimalleja niiden poikkileikkauksista.

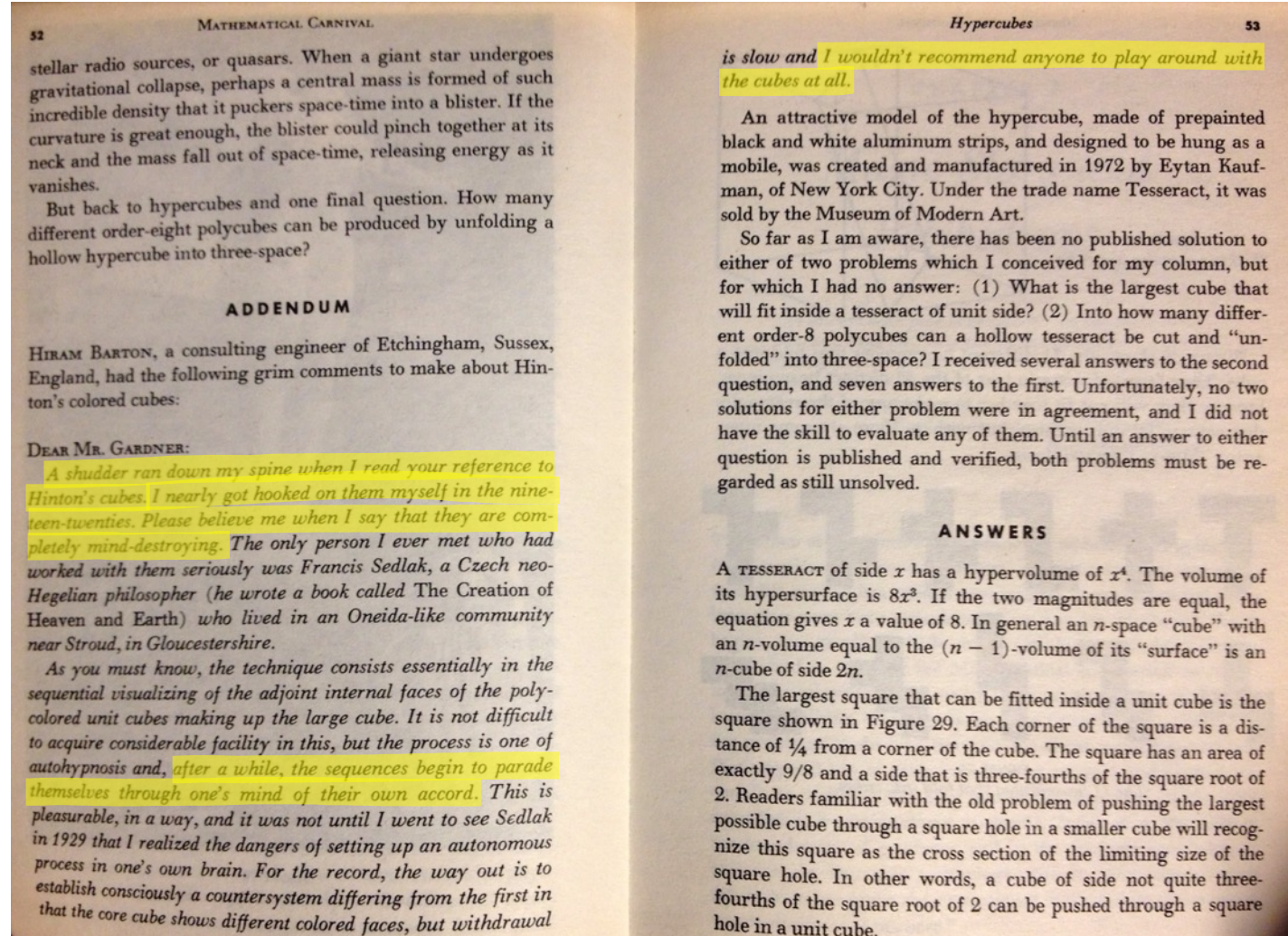


Alicia Boole Stott, (1860–1940)

PALIKOIDEN 'VAARAT'

Algernon Blackwoodin scifi-tarina *A Victim of Higher Space* (1914) kertoo miehestä, joka Hintonin oppien mukaisia palikkaharjoituksia tehtyään luiskahtelee jatkuvasti tahtomattaan neljänteen ulottuvuuteen.

Kun Martin Gardner kirjoitti Hintonin palikoista *Scientific American* -artikkelissaan, hän sai lukijapostia jossa varoitettiin palikoiden 'mieltätuhoavasta' vaikutuksesta:



Martin Gardner: *Mathematical Carnival* (1965)

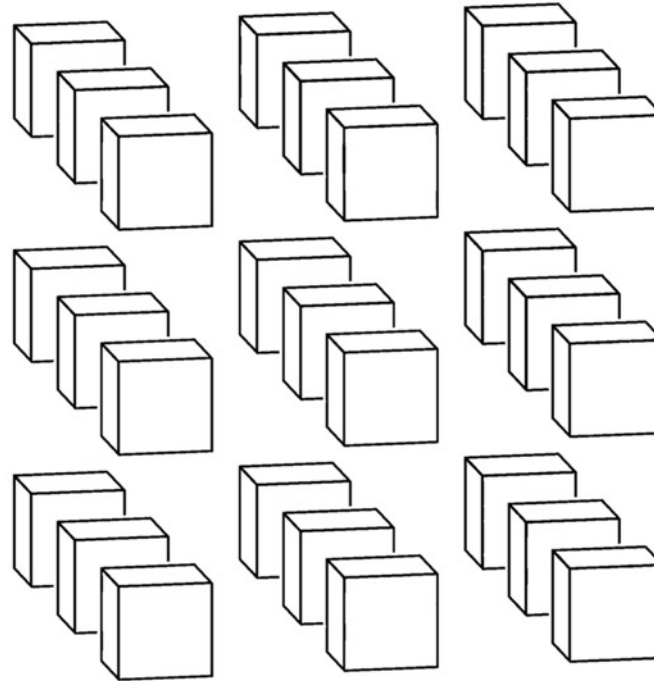
KUUTION POIKKILEIKKAUKSET TASOSSA

Ennen kuin siirrymme käsittelemään tesseractia itseään, on hyödyllistä tarkastella ensin alempiulotteista tilannetta. Viipaloimme siis kuution 27 osaan, ja tarkastelemme niiden poikkileikkauksia kaksiulotteisessa kuvatasossa, kuvitteellisen kaksiulotteisen olennon näkökulmasta.

KUUTION JAKAMINEN OSIIN

Ensin leikkaamme kuution kolmeen viipaleeseen jokaisen kolmen pääsuunnan mukaisesti.

Näin saamme 3x3x3 rykelmän pieniä kuutioita, joista jokainen edustaa alkuperäisen kuution kärkipistettä, särmää, tahkoa, tai alkuperäistä kuutiota itseään.



KUUTIO

8 kärkipistettä

12 särmää

6 tahkoa (neliötä)



27 KUUTIOTA

8 kärkipalaa

12 särmäpalaa

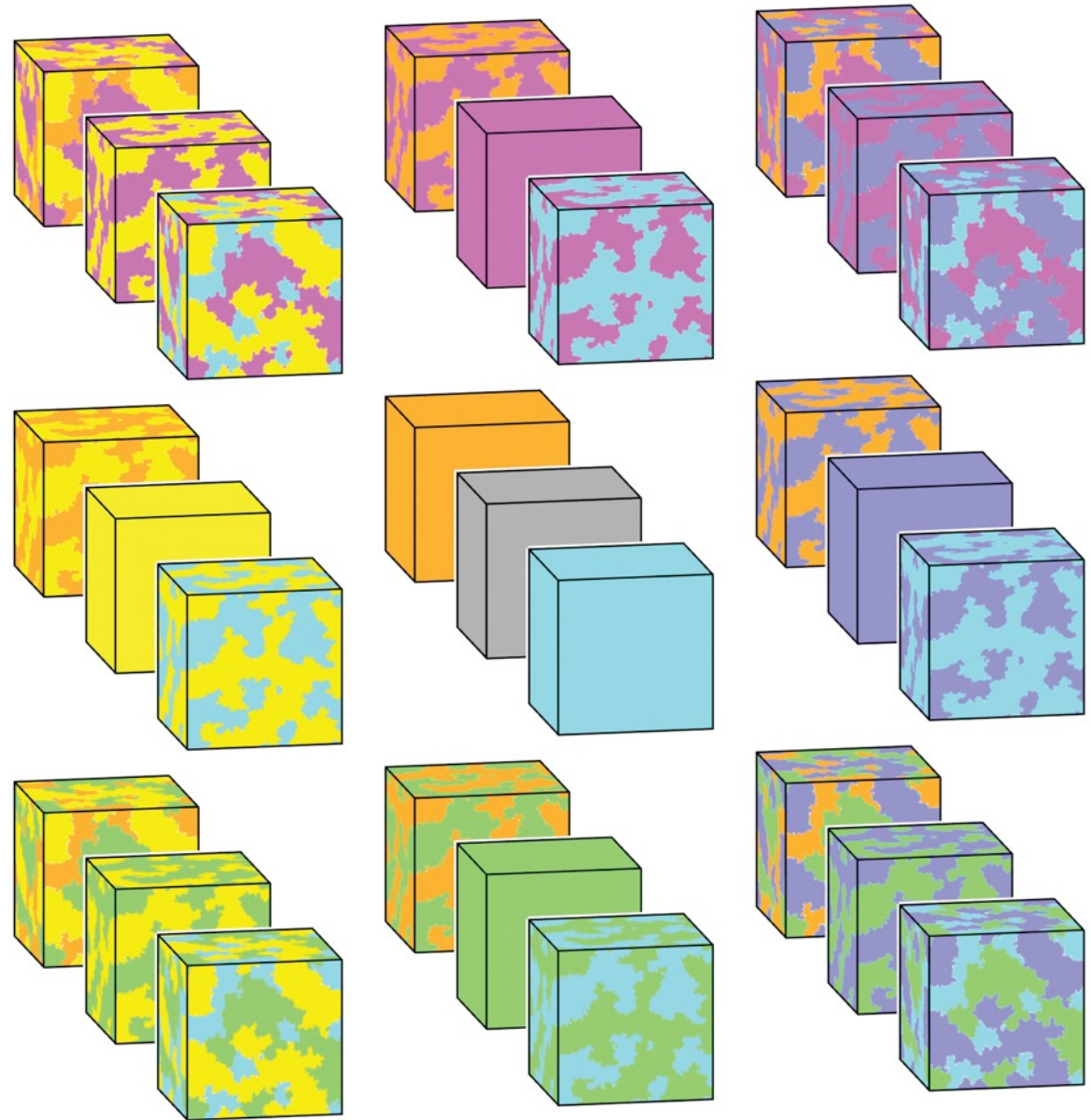
6 tahkopalaa

1 ydinpala

KUUTION OSIEN VÄRITTÄMINEN

Kuution osat saavat uniikit
värinsä kun ajatellaan kuutiota
kohden osoitettavan valoa
kolmesta eri suunnasta
(keltainen, oranssi, punainen).

Varjopuolella ovat valon
vastavärit (violetti, sininen,
vihreä).



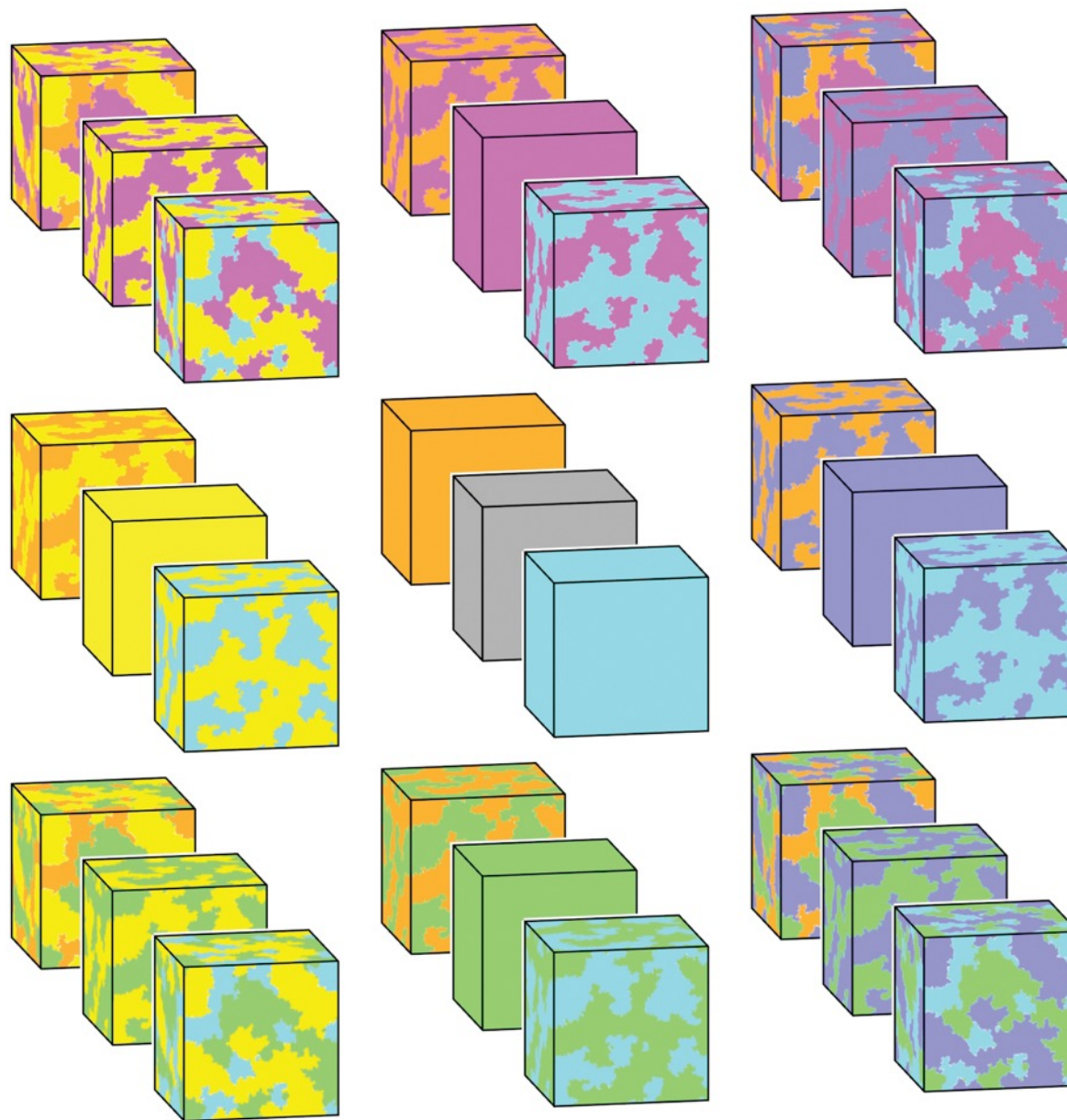
KUUTION OSIEN VÄRITTÄMINEN

Särmäpalat ovat kolmevärisiä sillä
niihin vaikuttaa valo/varjo
kolmesta suunnasta.

Kärkipalat ovat kaksivärisiä sillä
niihin vaikuttaa valo/varjo
kahdesta suunnasta.

Tahkopalat ovat yksivärisiä sillä
niihin vaikuttaa valo/varjo vain
yhdestä suunnasta.

Ydinpala on väritön (harmaa),
sillä siihen ei vaikuta mikään
valo/varjo.

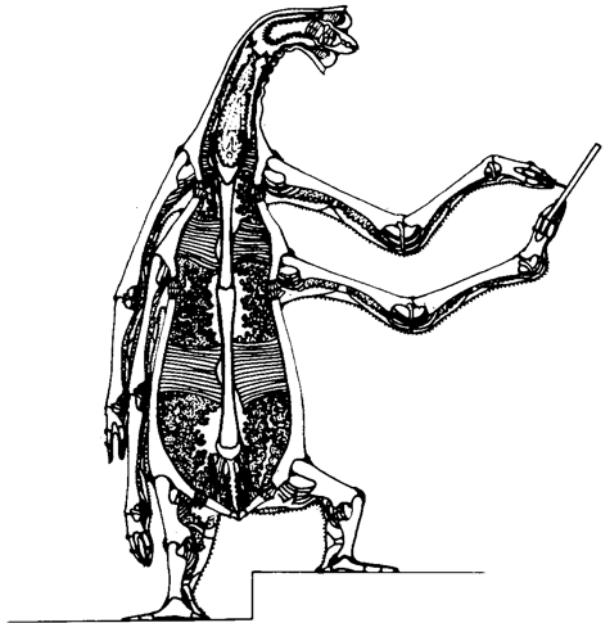


KUUTION POIKKILEIKKAUKSET TASOSSA

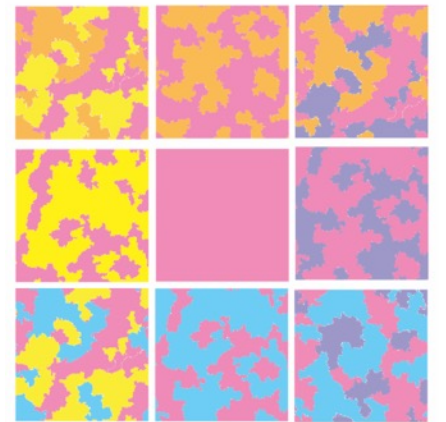
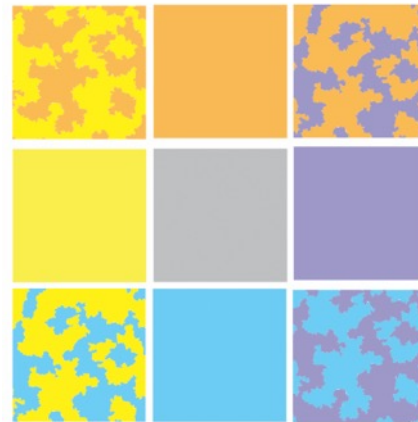
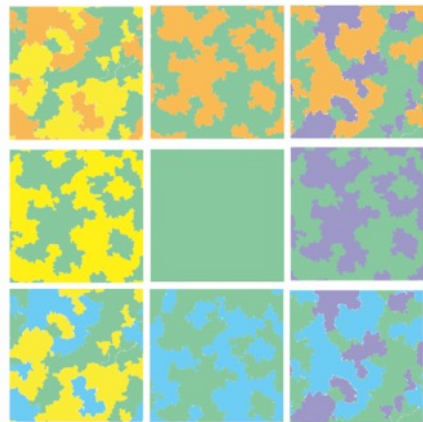
Nyt kaikkia kuution osia edustavat 27 palaa voidaan esittää laattoina, joista kootaan kuution poikkileikkaukset. Koska tällaiset neliölaatat ovat täysin litteitä, voidaan niitä käyttää kuution rakenteen opettamiseen **kaksiulotteiselle** olennotle.

Kuvitteelliset kaksiulotteiset maailmat ovat tärkeitä neliulotteisen geometrian ymmärtämisen kannalta, sillä ne haasteet joita meillä on hyperkappaleiden kuvittelemisessa, ovat hyvin samankaltaisia kuin ongelmat joita '2D-olento' kohtaa yrittäessään kuvitella jotain kolmiulotteista kappaletta, kuten kuutiota.

Kaunokirjallisuudessa luotuja kaksiulotteisia maailmoja ovat mm. A. K. Dewdneyn *Planiverse* (1984), ja Edwin A. Abbottin *Flatland* (1884).

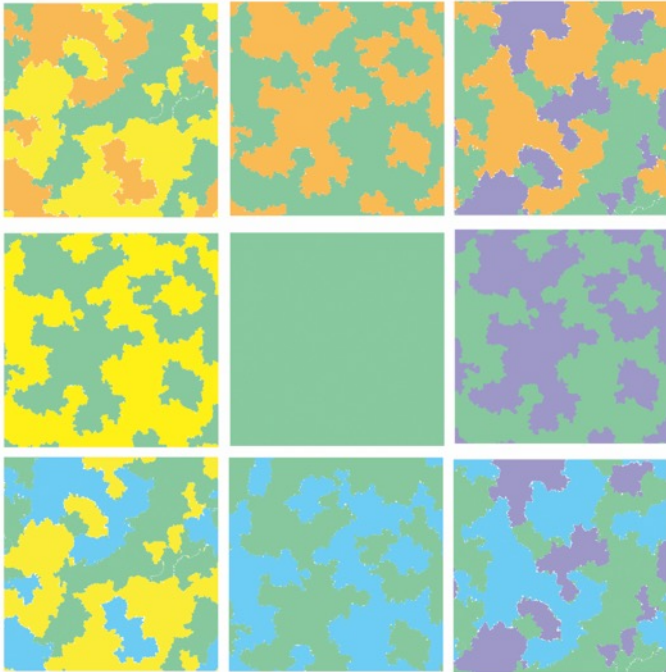


Planiversen kaksiulotteinen päähenkilö

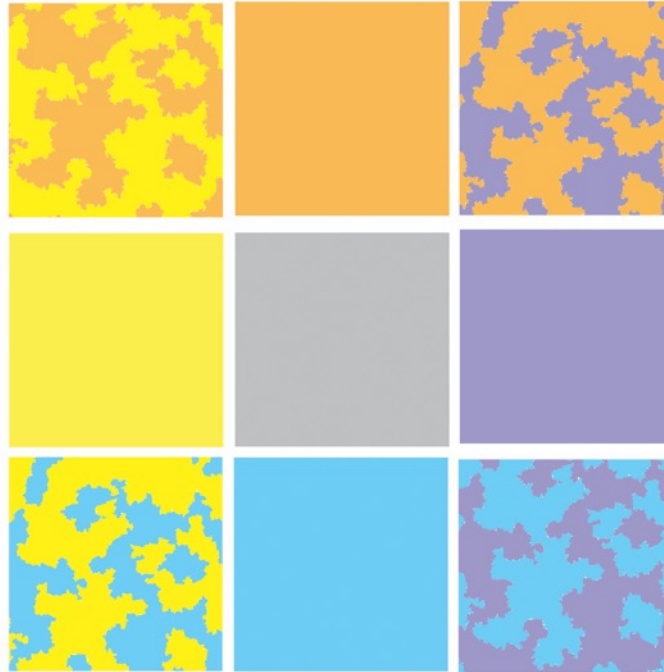


Alla oleva kolmen kuvan sarja esittää poikkileikkauksia jotka tulevat kaksiulotteisen olennon näkyviin, kun kuutio työnnetään sen kaksiulotteisen maailman läpi vihreä tahko edellä:

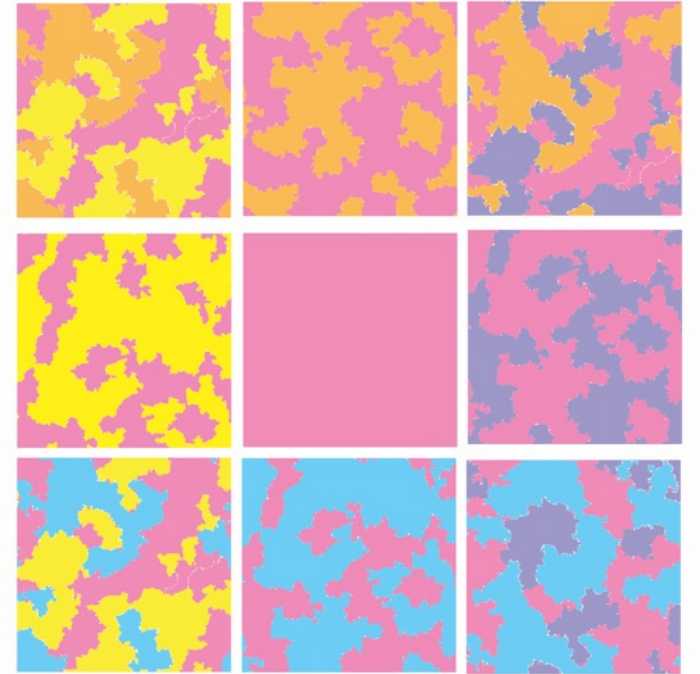
Ensiksi näkyviin tulee siis vihreä tahko, ja sitä ympäröivät särmät ja kärkipisteet (a). Seuraavassa poikkileikkauksessa 2D-olento näkee kuution ytimen (harmaa), ja sitä ympäröivät tahkot ja särmät (b). Viimeiseksi näkyviin tulee punainen tahko, ja sitä ympäröivät särmät ja kärkipisteet (c).



(a)



(b)

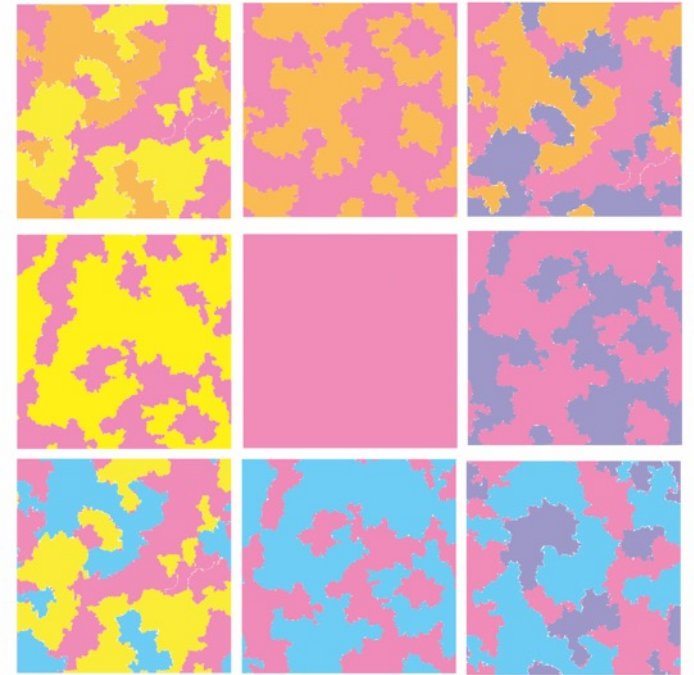
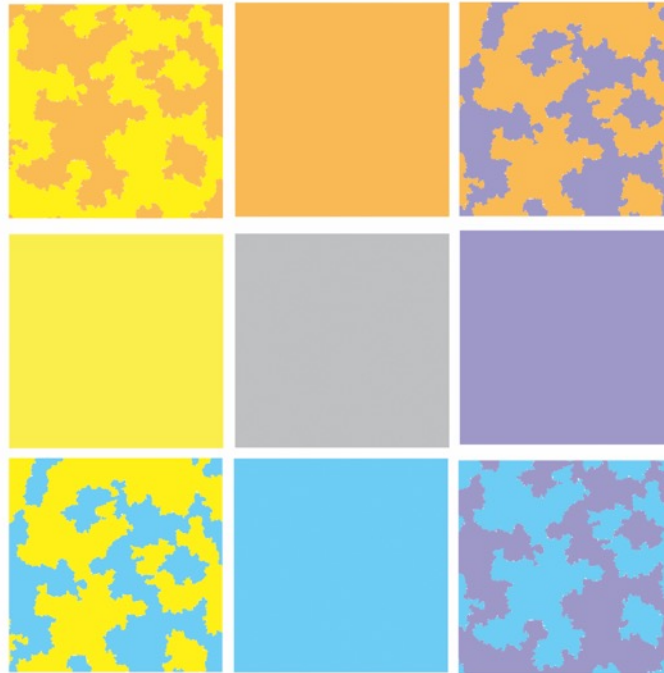
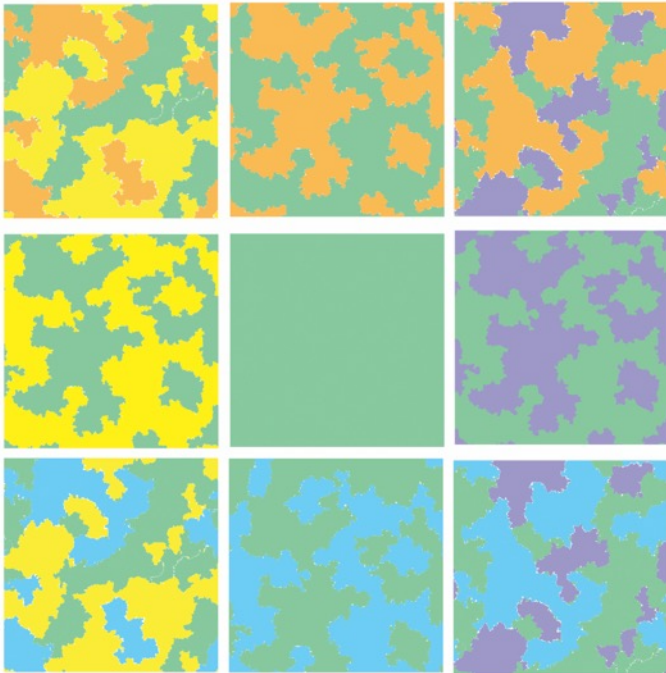


(c)

Tehtävä:

Tulosta kolmisivuinen pdf-tiedosto ” Kuution_poikkileikkauslaatat.pdf ” värillisenä, ja leikkaa laatat irti toisistaan. Järjestä laatat uudelleen niin että ne kuvaavat kolmen poikkileikkauksen sarjan jostain toisesta suunnasta. Toista niin kauan että hallitset poikkileikkaukset hyvin.

Minkälaisia säännönmukaisuuksia huomaat vierekkäisten laattojen värityksien suhteissa?
Milloin kaksi laattoa voivat olla naapureita? Milloin eivät?



TESSERAKTIN POIKKILEIKKAUKSET KOLMIULOTTEISESSA AVARUUDESSA

Seuraavaksi siirrymme käsittelemään tesseractia itseään.

Ensin tarkastelemme kuinka korkeampiulotteisia 'kuutioita' voidaan luoda raahaamalla matalaulotteisempia elementtejä kohtisuoraan pois niiden avaruuksista.

TESSERAKTIN KONSTRUOINTI

Jos pistettä (a) liikuttaa johonkin suuntaan (b), se jättää jälkeensä janan (c). Jos janaa taas liikuttaa kohtisuoraan pois sen suoralta sen pituuden verran (d), saadaan neliö (e). Samalla tavalla saamme kuution neliöstä (f–g), ja lopulta kun kuutiota vielä liikutetaan kohtisuoraan pois sen avaruudesta sen särmän pituuden verran (h), saadaan tesseracti (i).

(a)



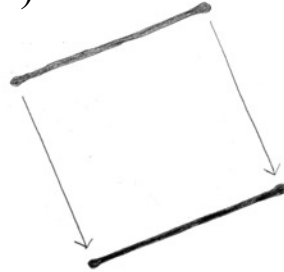
(b)



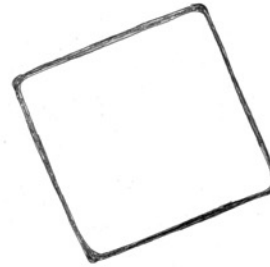
(c)



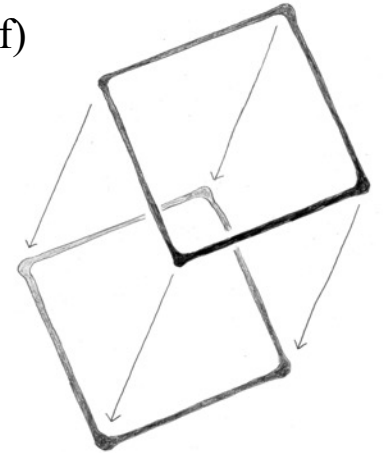
(d)



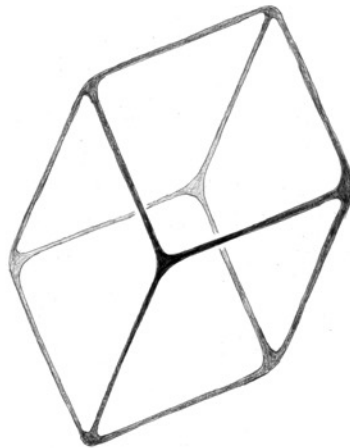
(e)



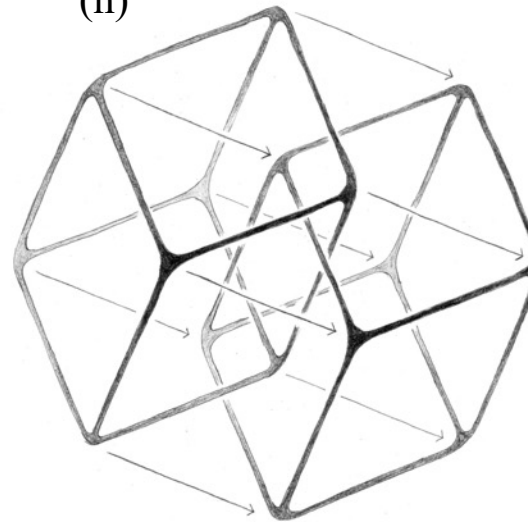
(f)



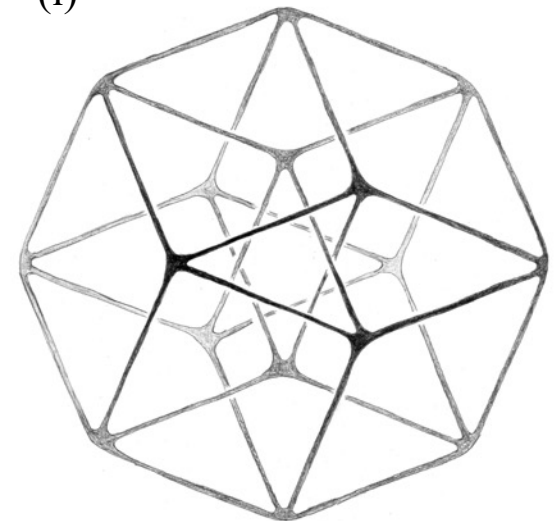
(g)



(h)



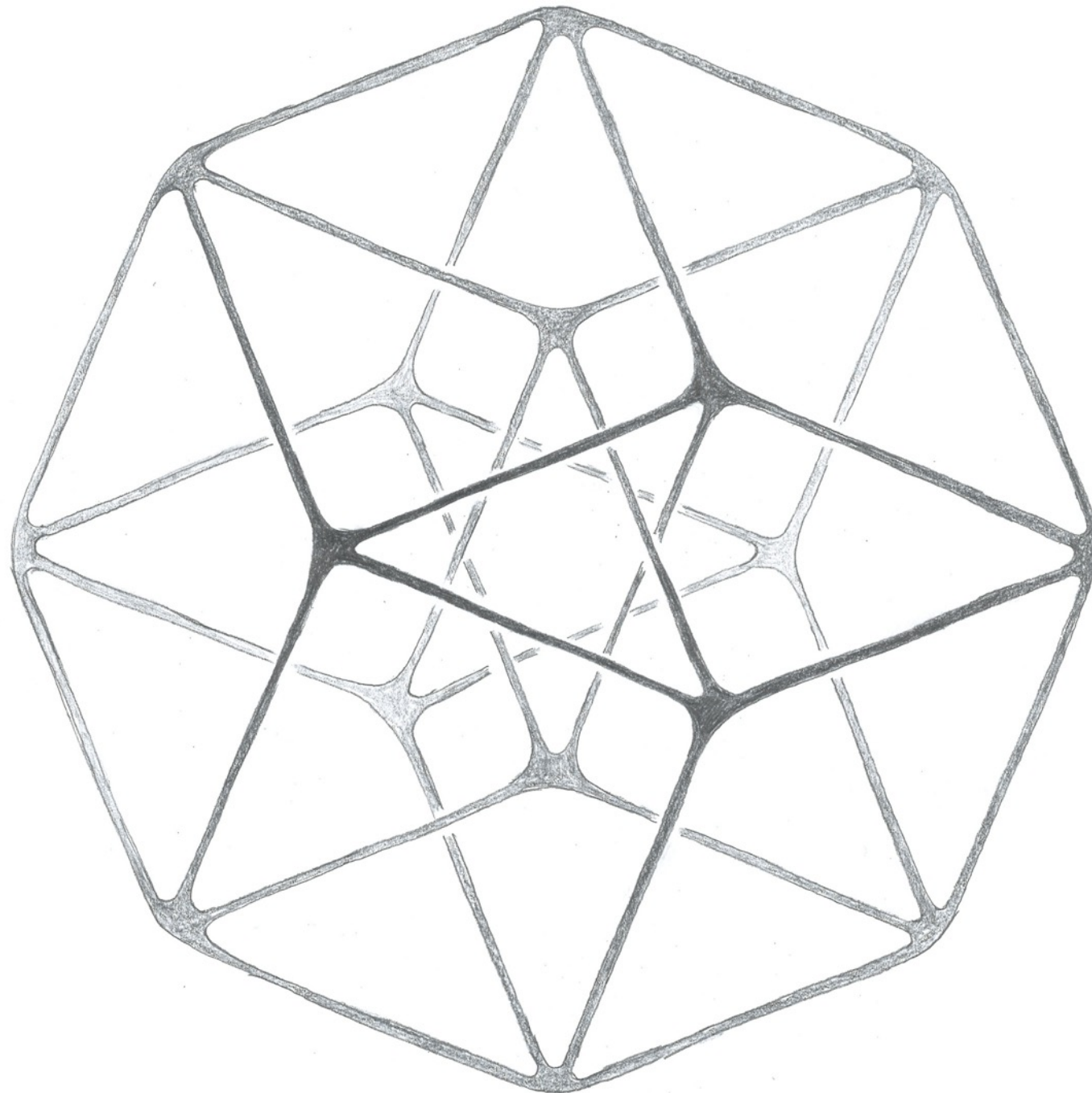
(i)



TESSERAKTIN RAKENNE

Tesserakti on siis
säännöllinen
neliulotteinen kappale
jossa on:

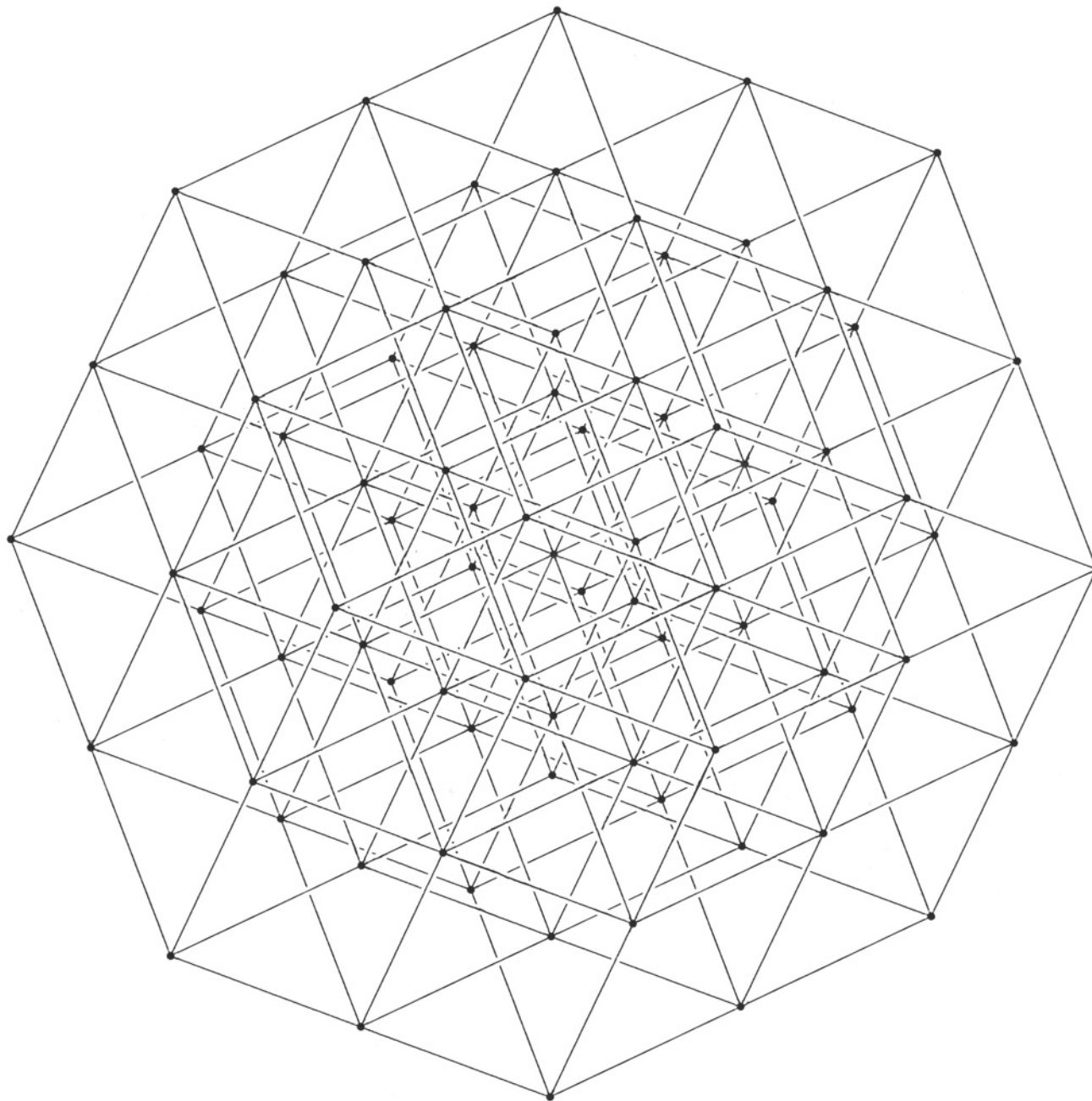
16 kärkipistettä
32 särmää
24 tahkoa (neliöitä)
8 solua (kuutioita)



TESSERAKTIN JAKAMINEN OSIIN

Leikkaamme tesseractin kolmeen viipaleeseen jokaisen *neljän* pääsuunnan mukaisesti.

Näin saamme $3 \times 3 \times 3 \times 3$ rykelmän pieniä tesseracteja, joista jokainen edustaa alkuperäisen tesseractin kärkipistettä, särmää, tahkoa, solua, tai alkuperäistä tesseractia itseään.



TESSERAAKTI

16 kärkipistettä
32 särmää
24 tahkoa (neliöitä)
8 solua (kuutioita)



81 TESSERAAKTIA

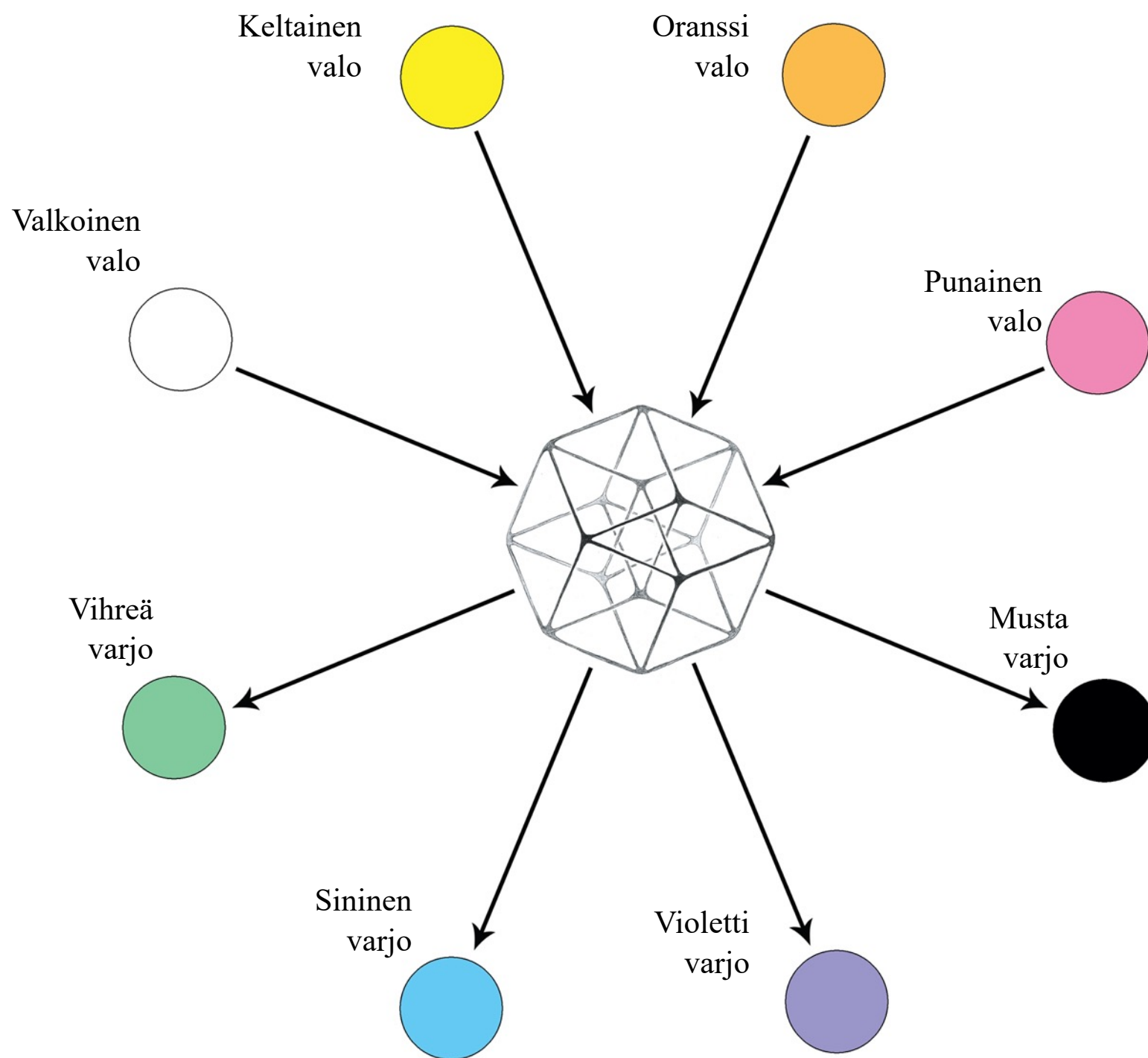
16 kärkipalaa
32 särmäpalaa
24 tahkopalaa
8 solupalaa
1 ydinpalaa

Kuvassa jokainen piste edustaa yhtä pientä tesseractia, ja viivat kertovat miten ne ovat kiinni toisissaan.

TESSERAKTIN OSIEN VÄRITTÄMINEN

Tesseraktin osat saavat uniikit värinsä kun ajatellaan sitä kohden osoitettavan valoa neljästä eri suunnasta (valkoinen, keltainen, oranssi, punainen).

Varjopuolella ovat valon vastavärit (musta, violetti, sininen, vihreä).



TESSERAKTIN OSIEN VÄRITTÄMINEN

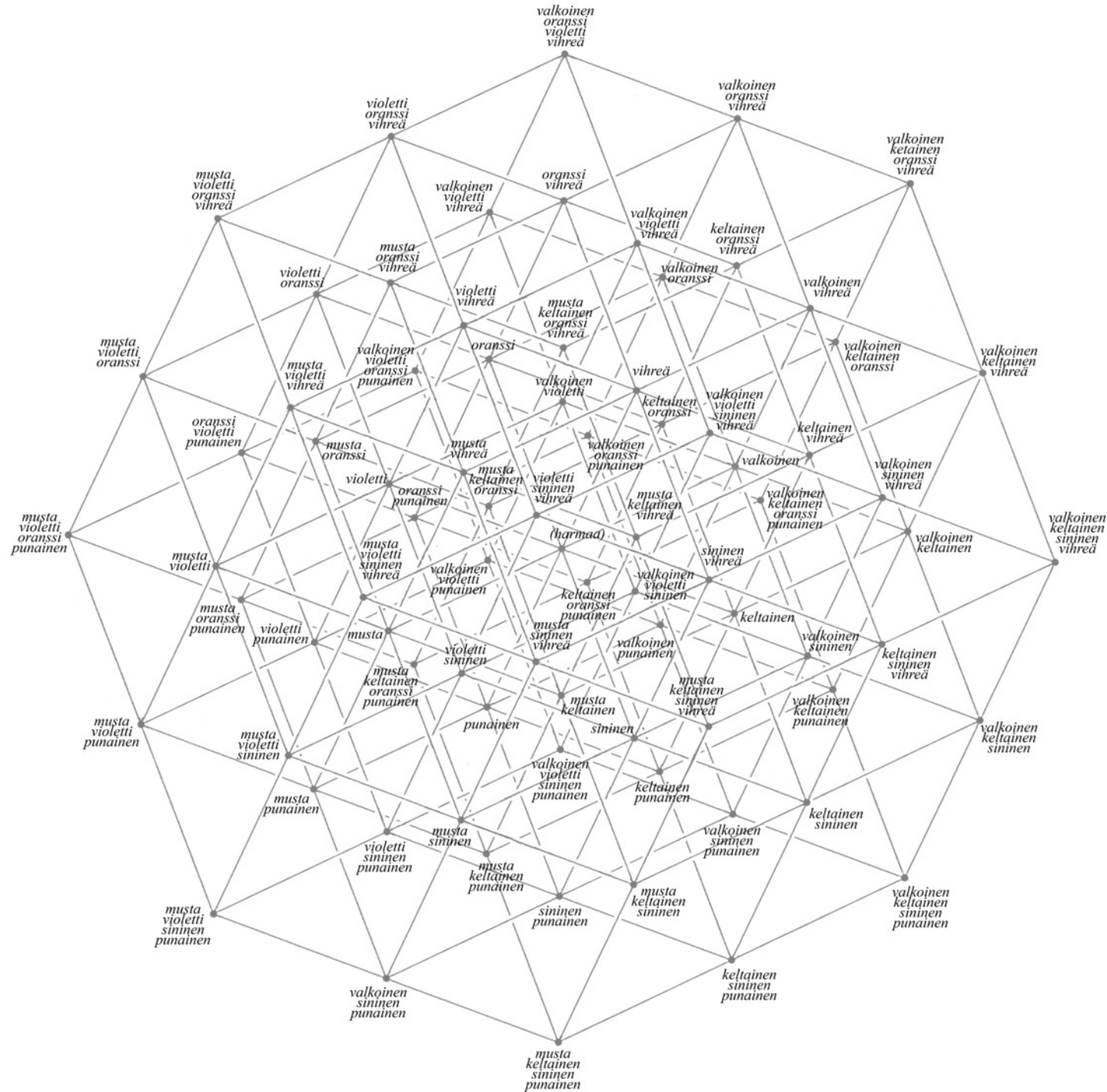
Kärkipalat ovat nelivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo neljästä suunnasta.

Särmäpalat ovat kolmevärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo kolmesta suunnasta.

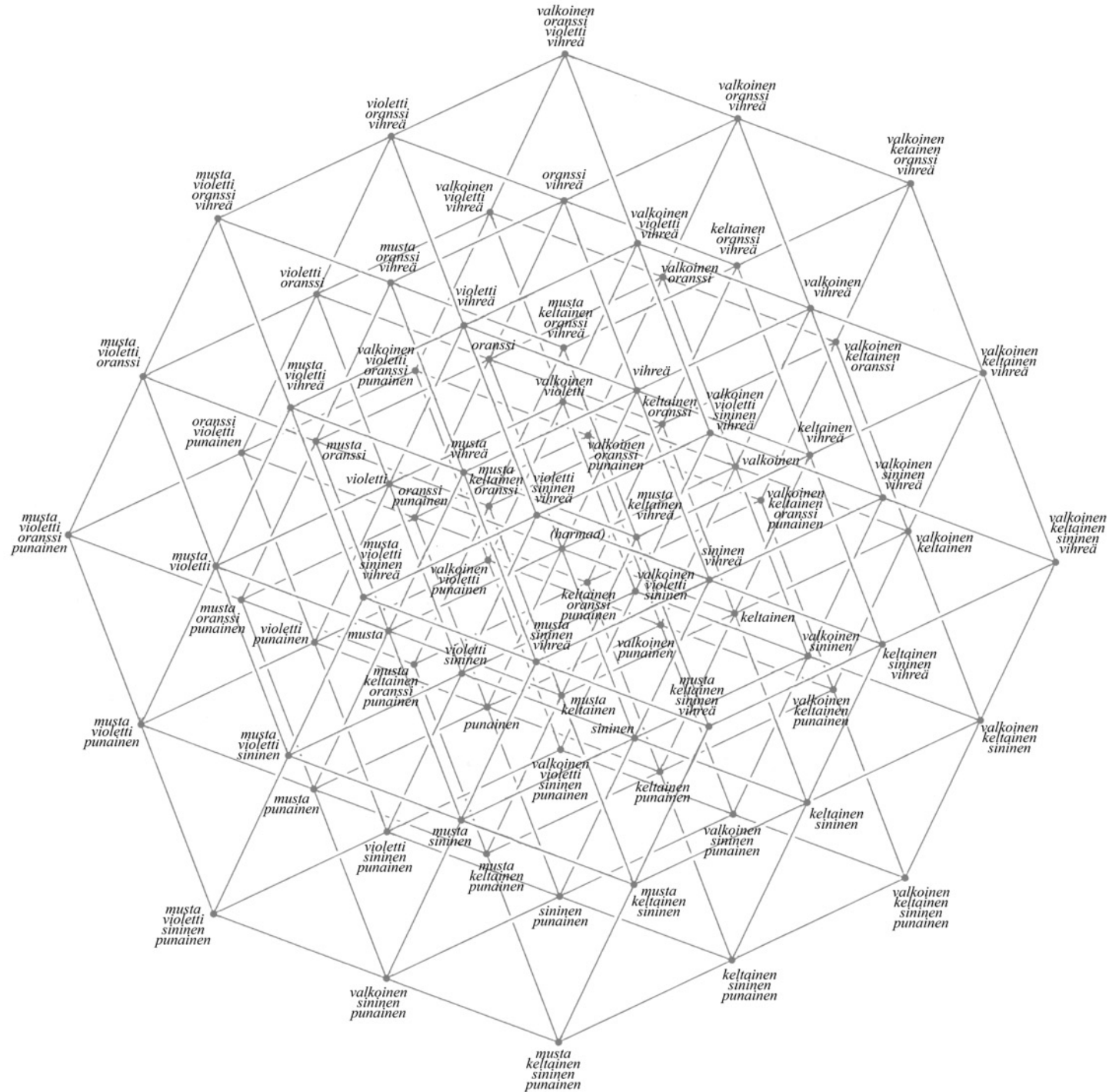
Tahkopalat ovat kaksivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo kahdesta suunnasta.

Solupalat ovat yksivärisiä sillä niihin vaikuttaa valo/varjo vain yhdestä suunnasta.

Ydinpala on väritön (harmaa), sillä siihen ei vaikuta mikään valo/varjo.



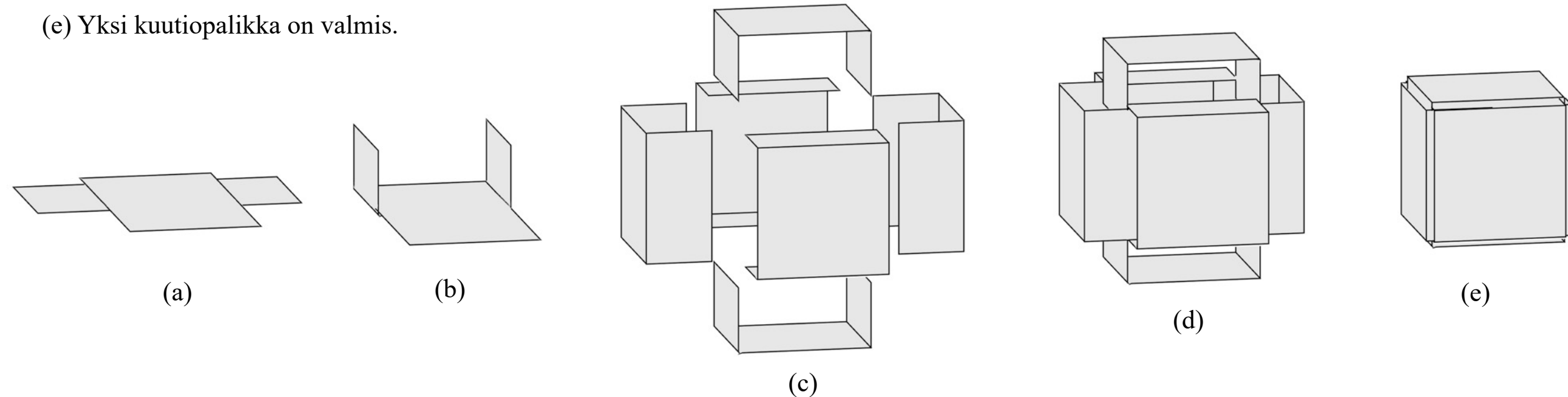
Viereinen kaavio listaa jokaisen 81 palikan värityksineen, sekä näyttää miten palikat liittyvät toisiinsa muodostaessaan suuremman tesseraktin.



PALIKKASETIN VALMISTAMINEN PAINETUISTA PAPERIARKEISTA

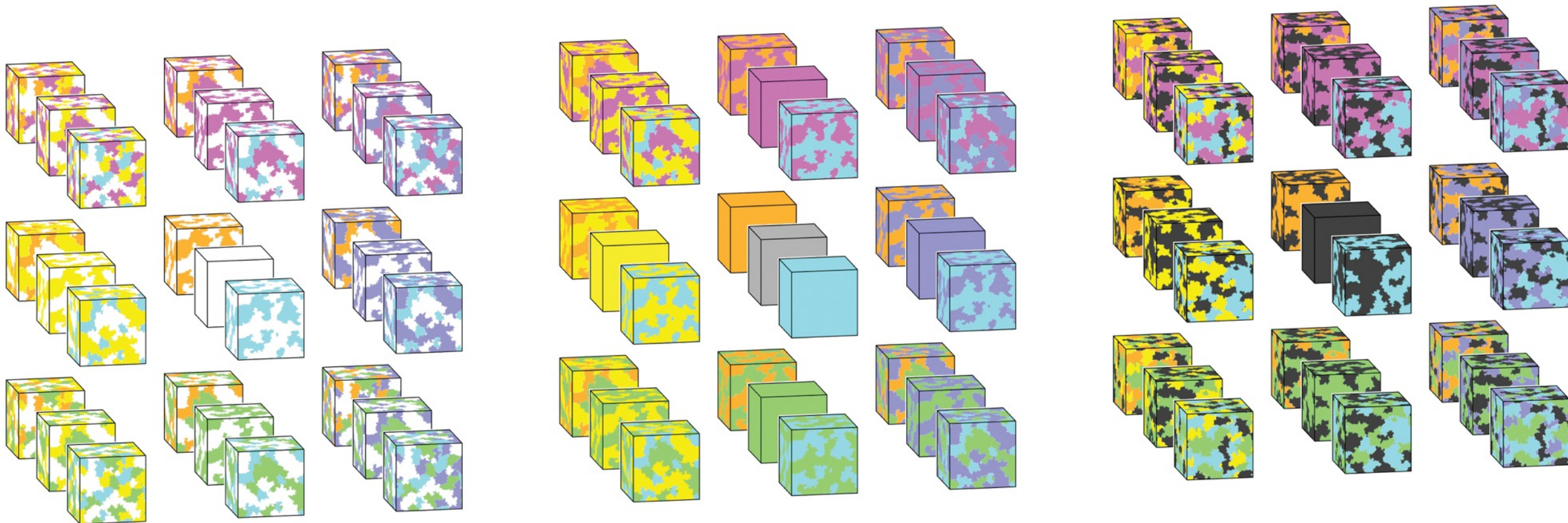
Tulosta 81-sivuinen pdf-tiedosto ” KuutiotA3.pdf” värillisenä A3- tai A4-kokoon, tukevalle paperille.
Leikkaa/leikkauta jokainen arkki kuuteen ’korttiin’ leikkuumerkkien mukaisesti.

- (a) Paina/viillä jokaiseen korttiin kaksi viivaa jollain terävähköllä esineellä.
Käytä esim. toista korttia apuna niin että viivat rajaavat varmasti säännöllisen neliön kortista.
- (b) Taita kortti näitä viivoja myöten niin että saat yhden neliötahkon, ja siihen suorakulmaisesti liittyvät läpät.
- (c) Liitä kuusi samanväristä korttia toisiinsa pujottelemalla läpät neliötahkojen alle kuvan mukaisesti.
- (d) Taputtele kokonaisuus varovasti kasaan.
- (e) Yksi kuutiopalikka on valmis.



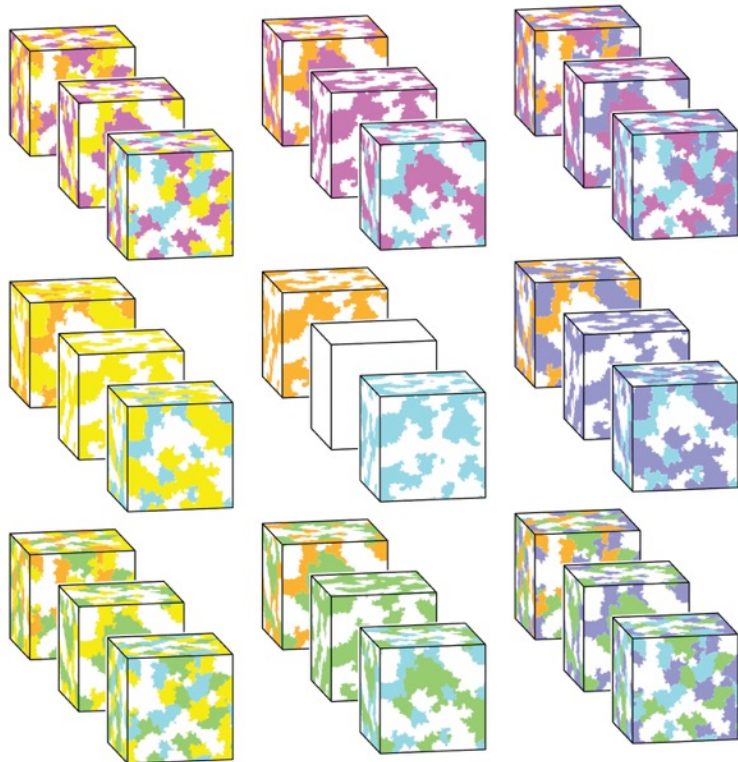
TESSERAKTIN POIKKILEIKKAUKSET KOLMIULOTTEISessa AVARUUDESSA

Nyt tesseraktin 81 osaa voidaan esittää valmiilla palikkasetillä, ja palikoista voidaan koota tesseraktin poikkileikkaukset.

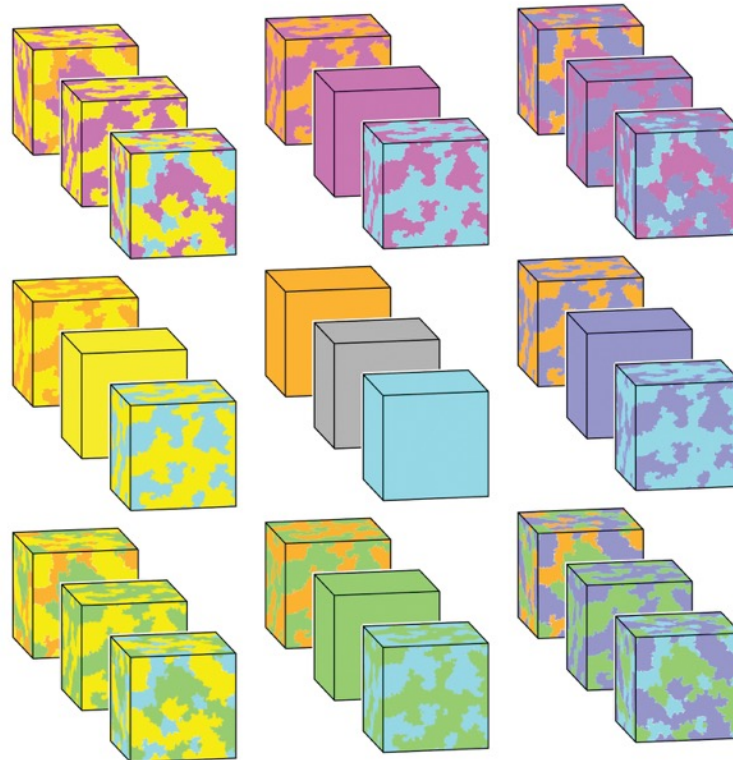


Alla olevan kolmen kuvan sarja esittää poikkileikkauksia jotka tulevat näkyviimme, kun tesseracti työnnetään kolmiulotteisen maailmamme läpi valkoinen solu edellä:

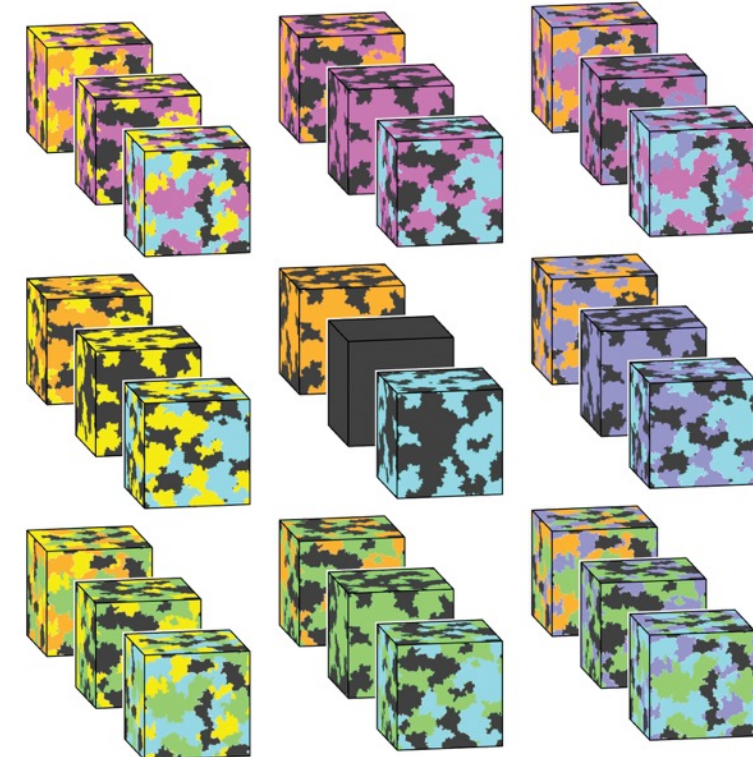
Ensiksi näkyviin tulee siis valkoinen solu, ja sitä ympäröivät tahkot, särmät, ja kärkipisteet (a). Seuraavassa poikkileikkauksessa näemme tesseractin ytimen (harmaa), ja sitä ympäröivät solut, tahkot, ja särmät (b). Viimeiseksi näkyviin tulee musta solu, ja sitä ympäröivät tahkot, särmät, ja kärkipisteet (c).



(a)



(b)



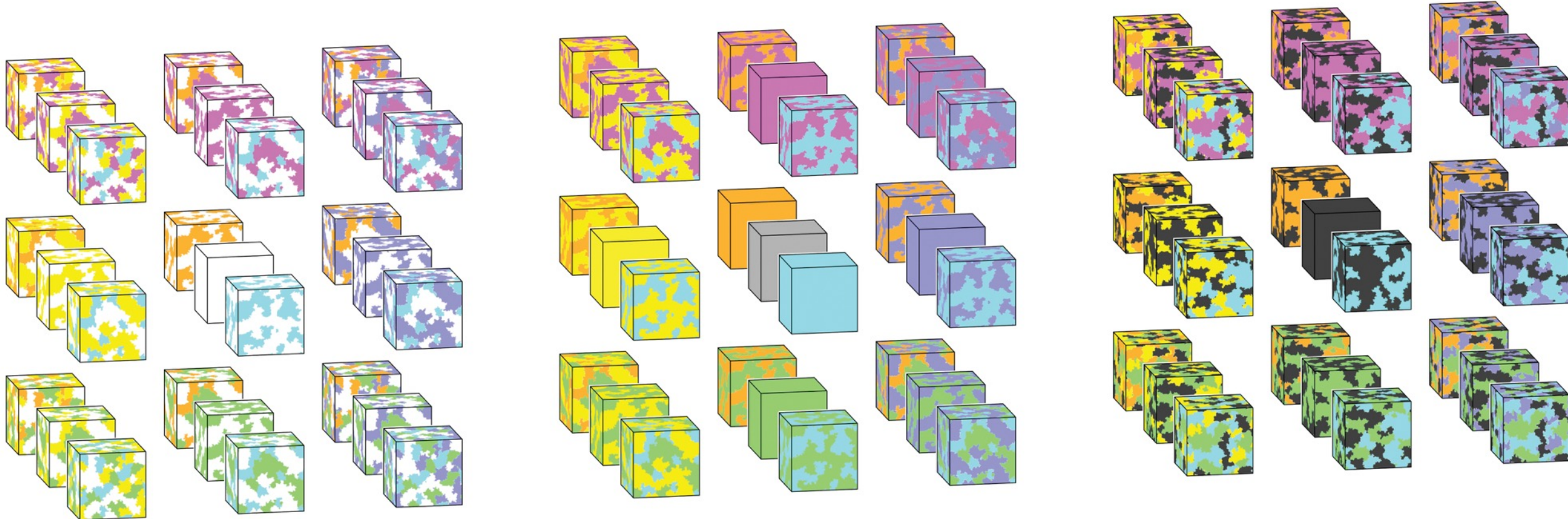
(c)

Tehtäviä:

Monellako muulla tavalla palikoista voi koota tesseraktin poikkileikkaukset?
Rakenna ne kaikki kolmen mallin sarjaksi palikkasetin osista.

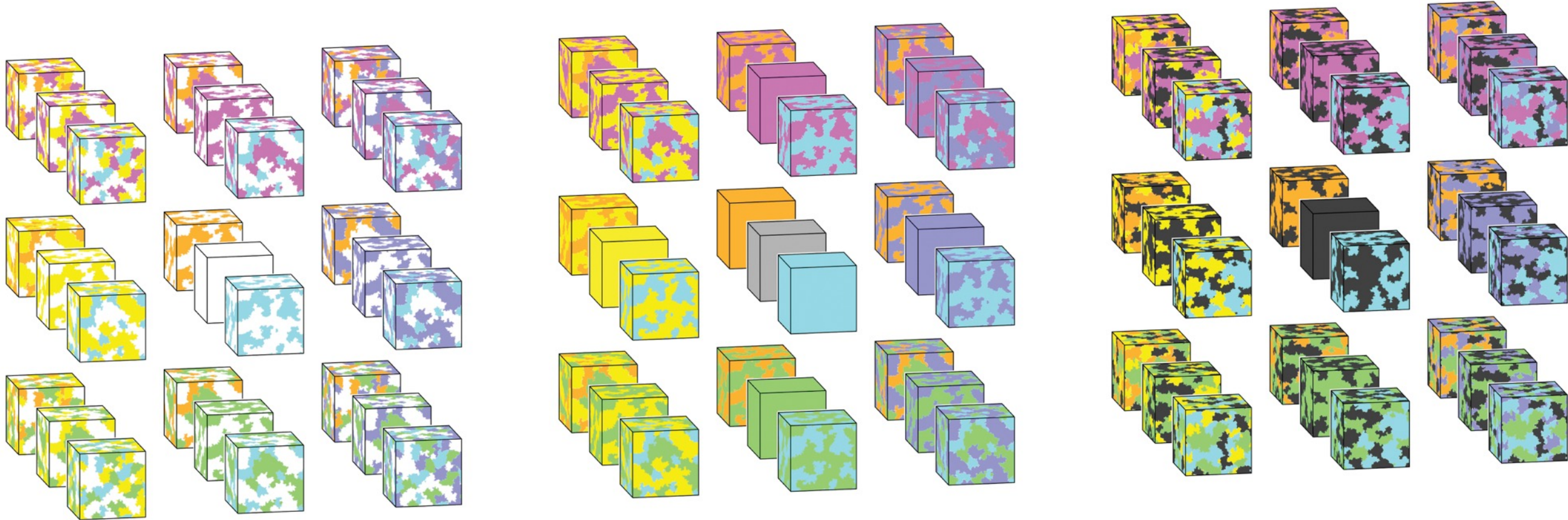
Toista niin kauan että hallitset tesseraktin rakenteen ja poikkileikkaukset hyvin.

Minkälaisia säännönmukaisuuksia huomaat vierekkäisten palikoiden värityksien suhteissa?
Milloin kaksi palikkaa voivat olla naapureita? Milloin eivät?



Tehtäviä:

Löytäisikö palikkasetille jonkin toisen, paremman värityksen? Millaista logiikkaa se noudattaisi?
Miten kehittäisit palikkasettiä esim. materiaalien, valmistustekniikoiden, tms. suhteen?
Suunnittele yllä kuvattua oppimateriaalia hyväksikäyttäen opetuskokeilu. Toteuta se ja raportoi tulokset.



KIRJALLISUUTTA:

Abbott, Edwin A. *Flatland: A Romance of Many Dimensions* [1884]. New York: Oxford University Press, 2006.

Blacklock, Mark. *The Emergence of the Fourth Dimension: Higher Spatial Thinking in the Fin De Siècle*. New York: Oxford University Press, 2018.

Blackwood, Algernon. "A Victim of Higher Space." *The Occult Review*, (William Rider and Son, Ltd) 20, no. 6 (December 1914): 318–335.

Dewdney, A. K. *The Planiverse: Computer Contact with a Two-dimensional World* [1984]. New York: Copernicus, 2000.

Gardner, Martin. "Hypercubes." In *Mathematical Carnival*, 41-54. London: Penguin Books, 1978.

Henderson, Linda Dalrymple. *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* [1983]. Revised edition. Cambridge: MIT Press, 2013.

Hinton, Charles Howard. *A New Era of Thought*. London: Swann Sonnenschein & Co., 1888.

Hinton, Charles Howard. *The Fourth Dimension*. New York: Swann Sonnenschein & Co., 1901.

Rucker, Rudy. *The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality* [1984]. New York: Dover, 2014.

Volkert, Klaus. *In Höheren Räumen: Der Weg der Geometrie in Die Vierte Dimension*. Berlin: Springer Spektrum, 2018.

White, Cristopher G. *Other Worlds: Spirituality and the Search for Invisible Dimensions*. Cambridge: Harvard University Press, 2018.