

RAKENNETAAN
MATEMAATTISIA ESINEITÄ:
TIKKUA RISTIIN

Taneli Luotoniemi
LUMATIKKA 2019



Työpajassa tutkitaan pisteistä, suorista ja tasoista koostuvia rakenteita. Niitä tarkastellaan perspektiiviopin, monitahokkaiden, kombinatoriikan, ja projektiivisen geometrian näkökulmista.

Siirrymme matalista ulottuvuuksista korkeampiin, tutustuen samalla noiden avaruuksien yksinkertaisimpiin geometrisiin muotoihin (jana, kolmio, tetraedri, jne.) ja tehden huomioita niiden välisistä projektiivisista suhteista.

Työskentele tehtävien 1–12 parissa valitsemallasi laajuudella, ja dokumentoi työskentelysi valokuvin, videoin, skannatuin piirroksin, tms.

KESKEISTÄ KÄSITTEISTÖÄ WIKIPEDIASSA:

Jos projektiivinen geometria ei ole sinulle tuttu aihe entuudestaan, tai jos kaipaat kertausta, lue *yleiskuvaus*-, *historia*-, ja *dualiteetti*-osiot suomenkielisestä wikipedia-artikkelista:

https://fi.wikipedia.org/wiki/Projektiivinen_geometria

Tässä materiaalissa käsiteltävät ilmiöt tapahtuvat projektiivisissa avaruuksissa, jotka kiertyvät takaisin itseensä ympyrää tai pallopintaa muistuttavalla tavalla.

Kertaa siis englanninkielisestä wikiasta mitä tarkoitetaan:

projektiivisella suoralla (https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_line),

projektiivisella tasolla (https://en.wikipedia.org/wiki/Real_projective_plane),

ja projektiivisilla avaruuksilla yleensä (https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_space).

Materiaalissa käsitellään myös korkeampien tilaulottuvuuksien rakenteita.

Englanninkielinen wikipedia-artikkeli neliulotteisesta avaruudesta on hyvä alustus tähän aiheeseen:

https://en.wikipedia.org/wiki/Four-dimensional_space

Työpajassa käsiteltäviä projektiivisen geometrian rakenteita kutsutaan konfiguraatioiksi.

Perustietoa konfiguraatioista löytyy täältä:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_\(geometry\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_(geometry))

TAUSTAA

Inspiraatio tähän työpajaan, ja tässä käsiteltävän rakennelman kehittämiseen syntyi kirjan *Anschauliche Geometrie* (1932) pohjalta. Siinä David Hilbert ja Stephan Cohn–Vossen kuvailivat kuinka kuuluisa projektiivinen rakenne nimeltä Reyen konfiguraatio saadaan projisoimalla 24-soluksi kutsuttu neliulotteinen kappale meidän kolmiulotteiseen avaruuteemme.

Tässä materiaalissa seuraamme Hilbertin ja Cohn–Vossenin viitoittamalla tiellä, ja opimme samalla uutta käsitteistöä:

Tarkastelemme kuinka neliulotteisen simpleksin laajennetun muodon gnomoninen projektio tuottaa Desarguesin konfiguraation – toisen tärkeän projektiivisen rakenteen. Tarkastelemme myös Desarguesin konfiguraation korkeampiulotteista versiota, sekä tutkimme sen ilmentämiä projektiivisia lainalaisuuksia.

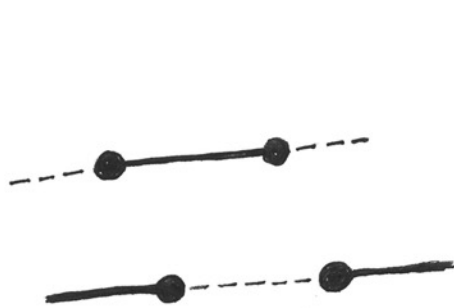
TAUSTAA

Projektiivisella geometrialla ja monitahokkailla on ollut olennainen tehtävä kuvataiteen kehityksessä jo renessanssin perspektiivimaalareiden ajoista asti.

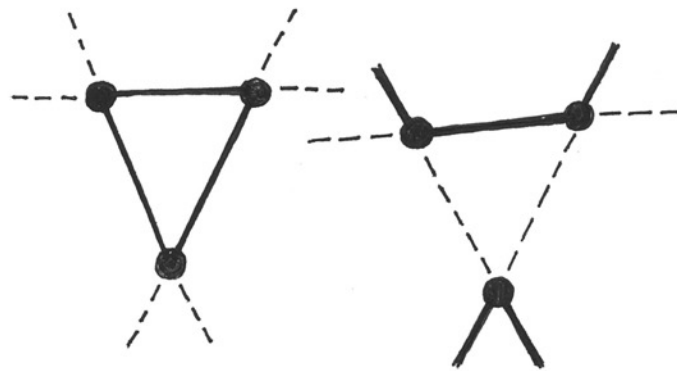
Viime vuosikymmeninä projektiivisen geometrian rooli on korostunut entisestään esimerkiksi tietokonegrafiikan kehityksen myötä.

Monet nykymatematiikan osa-alueet rakentuvat juuri projektiivisissä avaruuksissa, joten aiheen intuitiivinen hahmottaminen on tärkeää myös matematiikan näkökulmasta.

Koska tässä materiaalissa käsiteltävät konfiguraatiot sijaitsevat projektiivisissa avaruuksissa, on hyvä huomata että pisteiden, suorien ja tasojen rajaamat tilat eivät välttämättä aina piirry 'ehjinä', vaan niiden osat saattavat kiertyä äärettömyyden kautta vastakkaisille puolille kuviota:

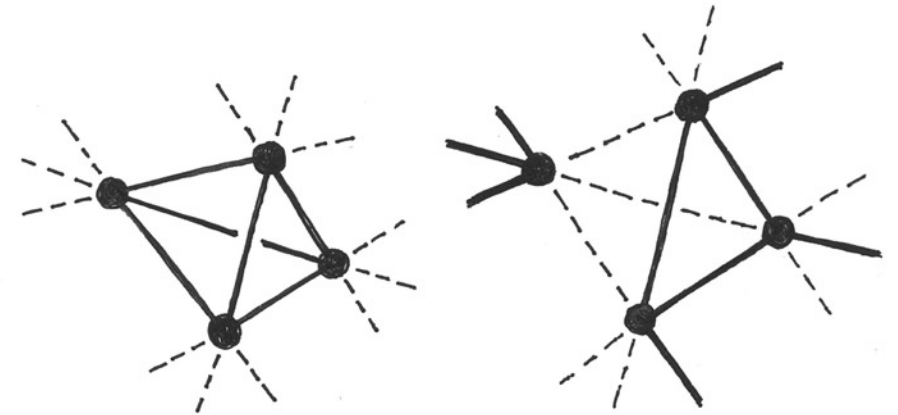


Kaksi tapaa miten kaksi pistettä voivat rajata janan projektiiviselta suoralta



Kaksi tapaa, joilla kolme suoraa voivat rajata kolmionmuotoisen alueen projektiiviselta tasolta

Tehtävä 1: Montako kolmionmuotoista aluetta kolme suoraa yhteensä määrittävät?



Kaksi esimerkkiä tavoista, joilla neljä tasoa voivat rajata tetraedrinmuotoisen tilan projektiivisessä avaruudessa

Tehtävä 2: Montako tetraedrinmuotoista tilaa neljä tasoa yhteensä määrittävät?

ALEMPIULOTTEINEN ALUSTUS AIHEESEEN: TÄYDELLINEN NELIKULMIO GNOMONISENA PROJEKTIONA

Seuraavaksi aloitamme syventymisen itse aiheeseen:
Desarguesin konfiguraatioon.

Ennen kuin siirrymme käsittelemään Desarguesin konfiguraatiota itseään, on hyödyllistä tarkastella vastaavaa, mutta alempiulotteista tilannetta. Tämä tarkoittaa *tetraedrin laajentamista kuboktaedriksi*, ja sen projisoimista *gnomonisesti* kaksiulotteiseen kuvatasoon.

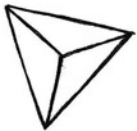
Jos jokin kohta myöhemmin seuraavissa korkeampiulotteisissa tilanteissa tuntuu haastavalta, palaa tähän alempiulotteiseen tilanteeseen ja tarkastele miten tuo nimenomainen asia toimii täällä. Ratkaisu ongelmaasi löytyy luultavasti juuri tätä kautta.

TETRAEDRI (3-SIMPLEKSI)

4 kärkipistettä

6 särmää

4 tahkoa (kolmioita)



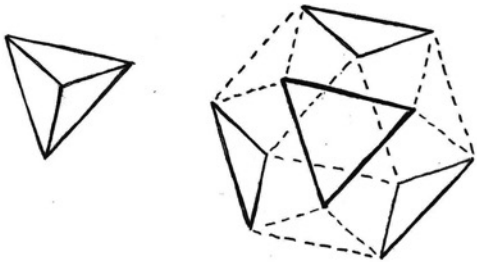
*Aloitamme **tetraedristä**,
joka on säännöllinen
kolmiulotteinen
monitahokas.*

TETRAEDRI (3-SIMPLEKSI)

4 kärkipistettä

6 särmää

4 tahkoa (kolmioita)



KUBOKTAHEDRI (LAAJENNETTU TETRAEDRI)

12 kärkipistettä

24 särmää

14 tahkoa (8 kolmiota & 6 neliötä)

*Kun tetraedri 'laajennetaan', sen neljä kolmiotahkoa liikkuvat säteittäisesti ulospäin. Tetraedrin neljä kärkipistettä avautuvat uusiksi kolmioiksi, ja kuusi särmää neliöiksi. Näin siis laajennettu tetraedri, eli **kuboktaedri**, koostuu 12 kärkipisteestä, 24 särmästä, ja 14 tahkosta. Samassa kuboktaedrin keskipisteen läpi kulkevassa tasossa sijaitsevat särmät muodostavat kuusikulmion (laajennetun kolmion), ja kuboktaedrilla on neljä tällaista kuusikulmiota poikkileikkauksinaan.*

Laajennus: [https://en.wikipedia.org/wiki/Expansion_\(geometry\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Expansion_(geometry))

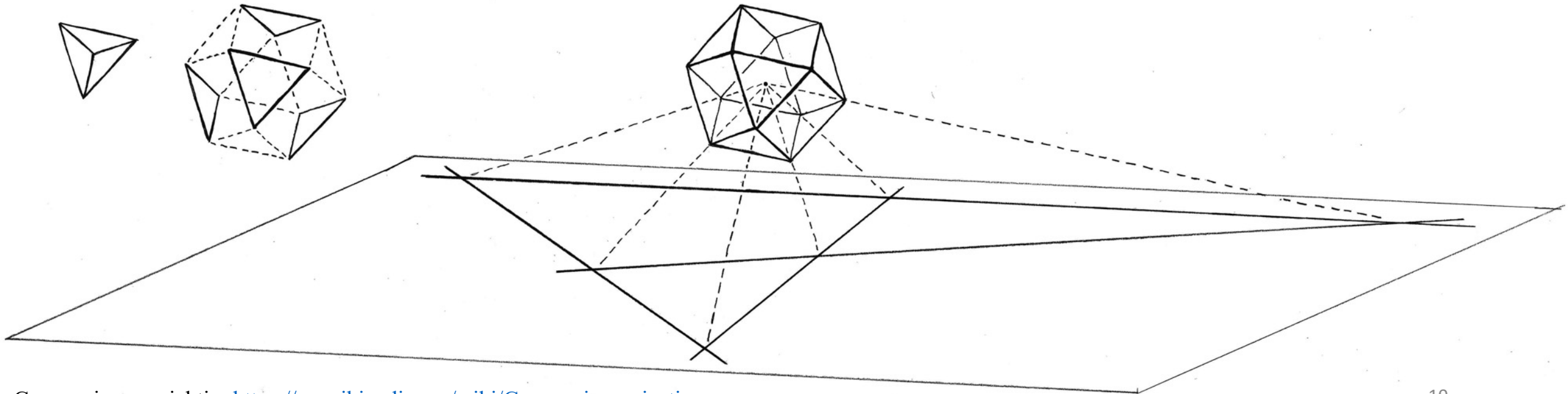
Kuboktaedri (eli laajennettu tetraedri): <https://en.wikipedia.org/wiki/Cuboctahedron>

TETRAEDRI
(3-SIMPLEKSI)
4 kärkipistettä
6 särmää
4 tahkoa (kolmioita)

KUBOKTAHEDRI
(LAAJENNETTU
TETRAEDRI)
12 kärkipistettä
24 särmää
14 tahkoa (8 kolmiota & 6 neliötä)

GNOMONINEN PROJEKTIO

*Sitten projisoimme kuboktaedrin kaksiulotteiselle kuvatasolle. Tällaista projektiota joka katsoo kappaletta sen keskipisteestä käsin kutsutaan **gnomoniseksi projektioksi**. Gnomoninen projektio antaa kuvan kappaleen siitä puoliskosta joka osoittaa kuvatasoa kohti. Huomaa, että kuboktaedrin samassa tasossa sijaitsevat särmät piirtyvät kuvatasoon yhdeksi suoraksi viivaksi.*

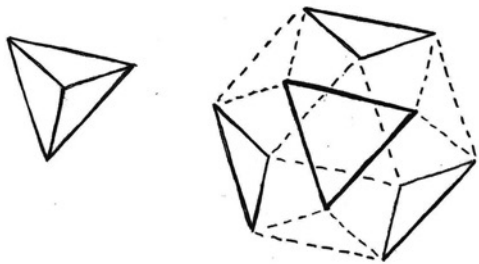


TETRAEDRI (3-SIMPLEKSI)

4 kärkipistettä

6 särmää

4 tahkoa (kolmioita)



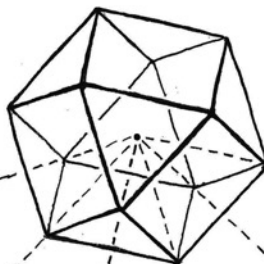
KUBOKTAHEDRI (LAAJENNUTTU TETRAEDRI)

12 kärkipistettä

24 särmää

14 tahkoa (8 kolmiota & 6 neliötä)

GNOMONINEN PROJEKTIO



*Kuboktaedrin gnomoninen projektio tuottaa kuuden pisteen ja neljän suoran muodostaman konfiguraation jota nimitetään **täydelliseksi nelikulmioksi**. Huomaa että konfiguraation jokainen suora on kuboktaedrin kuusikulmaisen poikkileikkauksen gnomoninen projektio.*

'TÄYDELLINEN NELIKULMIO'

6 pistettä

4 suoraa

(2 suoraa per piste
3 pistettä per suora)

KOROTTAMINEN NELJÄNTEEN ULOTTUVUUTEEN: DESARGUESIN KONFIGURAATIO VIISISOLUSTA

Seuraavaksi siirrymme käsittelemään Desarguesin konfiguraatiota itseään.

Konfiguraation rakentamiseksi muutamme neliulotteisen *viisisolun laajennetuksi viisisoluksi*, ja projisoimme sen gnomonisesti *kolmulotteiseen kuva-avaruuteen*.

VIISISOLUN KONSTRUOINTI

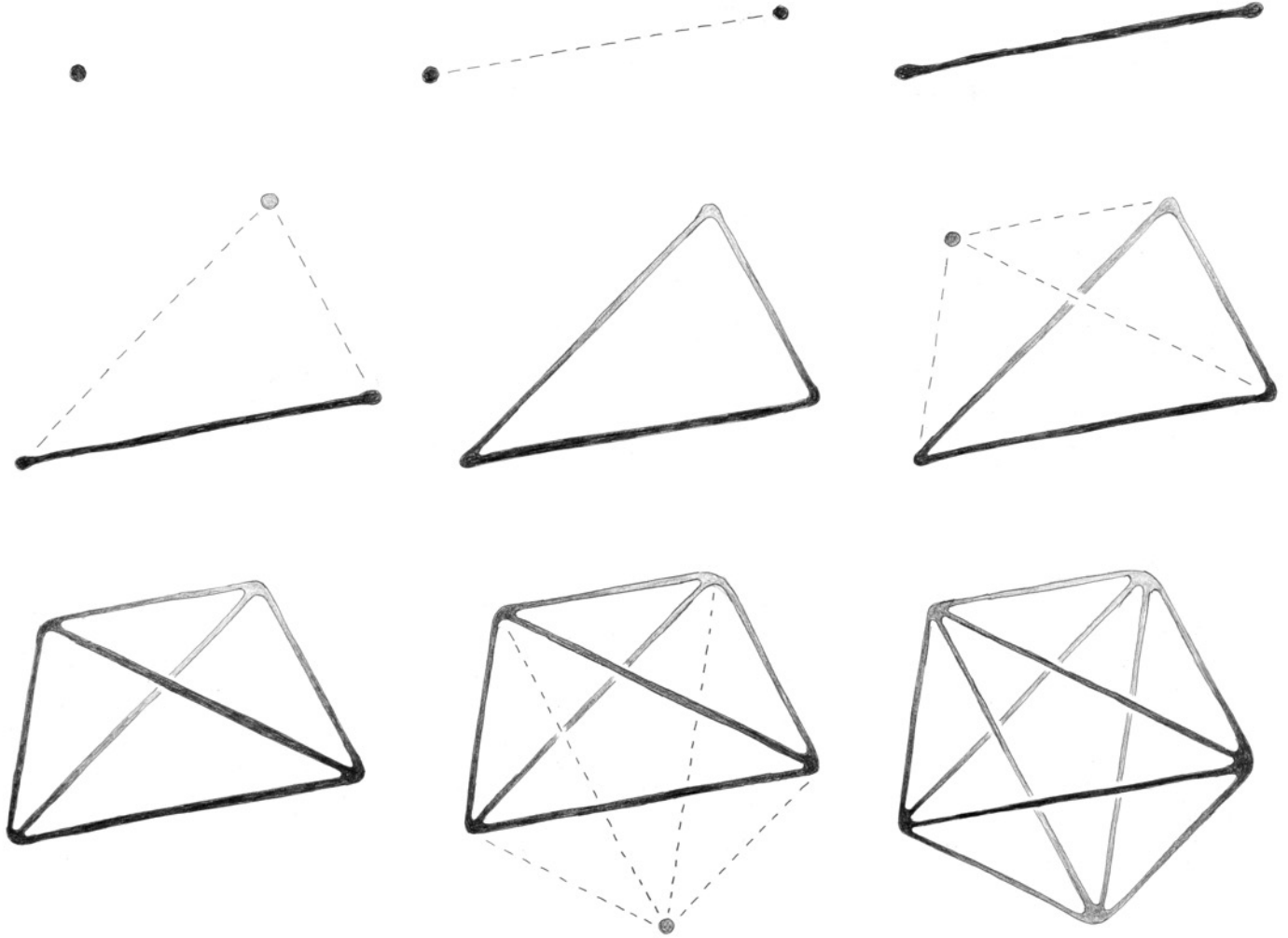
Viisisolun rakenteen käsittämiseksi on hyödyllistä tarkastella alempiulotteisten simpleksien, eli pisteen, janan, kolmion ja tetraedrin hierarkkista järjestystä:

Jos pisteen ulkopuolelle lisätään piste, määrittävät nuo kaksi pistettä janan (1-simpleksi).

Jos janan ulkopuolelle lisätään piste, määrittävät nuo pisteet kolmion (2-simpleksi).

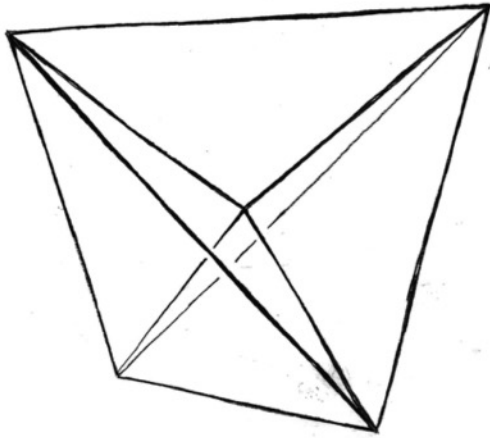
Jos kolmion ulkopuolelle lisätään piste, määrittävät ne tetraedrin (3-simpleksi).

Jos tetraedrin ulkopuolelle lisätään piste, nuo pisteet määrittävät viisisolun (4-simpleksi).



Simpleksi: <https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex>

Viisisolu: <https://en.wikipedia.org/wiki/5-cell>



*Aloitamme siis Desarguesin
konfiguraation valmistamisen
viisisolusta, joka on
säännöllinen neliulotteinen
kappale.*

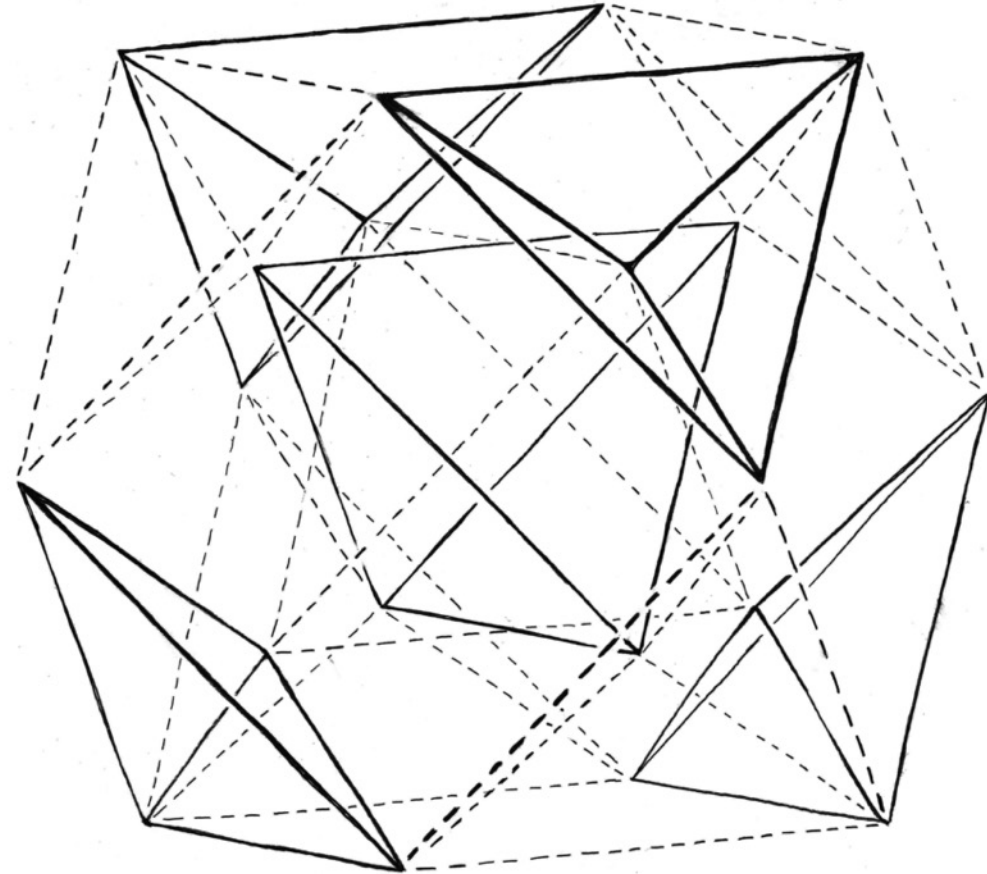
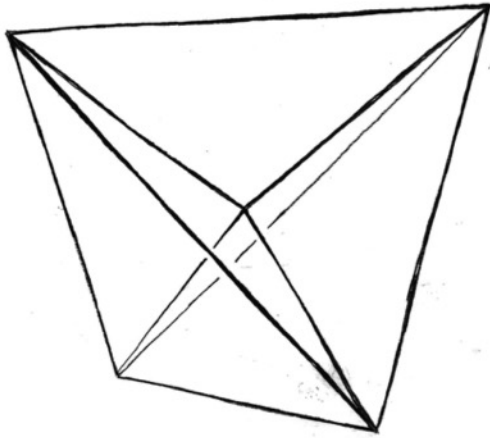
VIISISOLU (4-SIMPLEKSI)

5 kärkipistettä

10 särmää

10 tahkoa (kolmioita)

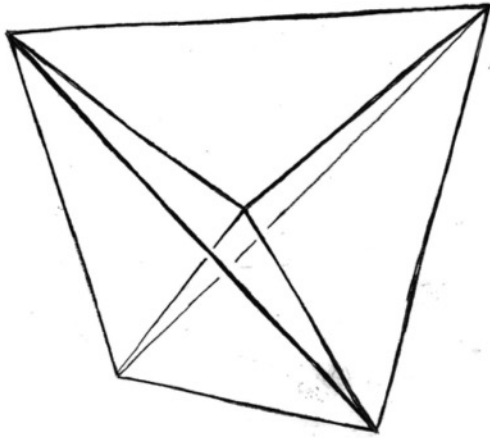
5 solua (tetraedrejä)



*Kun viisisolu laajennetaan, sen viisi tetraedrisolua liikkuvat säteittäisesti ulospäin. Viisisolun viisi kärkipistettä avautuvat uusiksi tetraedreiksi, ja kymmenen särmää kolmioprismoiksi. Tetraedrin kolmiotahkot kasvavat myös kolmioprismoiksi. Näin siis **laajennettu viisisolu** koostuu 20 kärkipisteestä, 60 särmästä, 70 tahkosta, ja 30 solusta. Samassa laajennetun viisisolun keskipisteen läpi kulkevassa kolmiulotteisessa viipaleessa sijaitsevat tahkot muodostavat kuboktaedrin, ja laajennetulla viisisolulla on viisi tällaista kuboktaedriä poikkileikkauksinaan.*

Laajennettu viisisolu:

https://en.wikipedia.org/wiki/Runcinated_5-cell



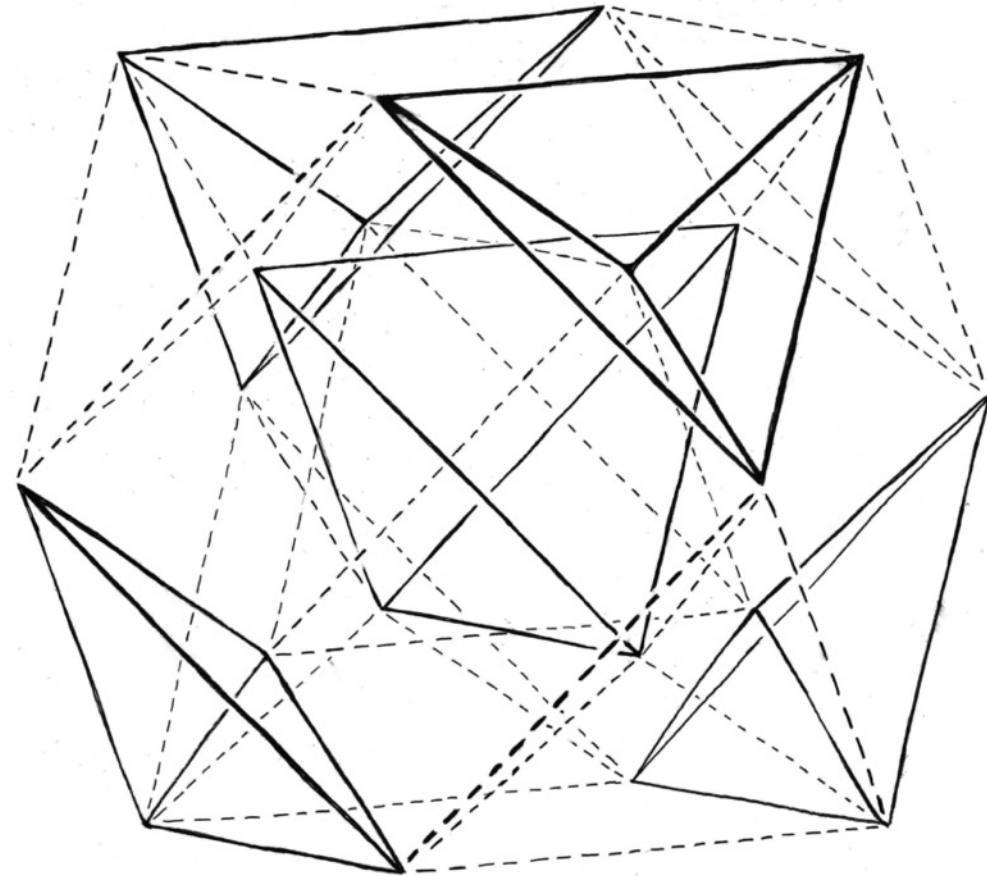
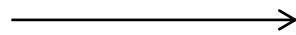
VIISISOLU

5 kärkipistettä

10 särmää

10 tahkoa (kolmioita)

5 solua (tetraedrejä)



LAAJENNETTU VIISISOLU

20 kärkipistettä

60 särmää

70 tahkoa (40 kolmiota + 30 neliötä)

30 solua (10 tetraedriä + 20 kolmioprsmaa)

*Laajennetun viisisolun gnomoninen projektio tuottaa kymmenen pisteen, kymmenen suoran, ja viiden tason muodostaman rakenteen, jota nimitetään **Desarguesin konfiguraatioksi**:*

DESARGUESIN KONFIGURAATIO

10 pistettä

10 suoraa

5 tasoa

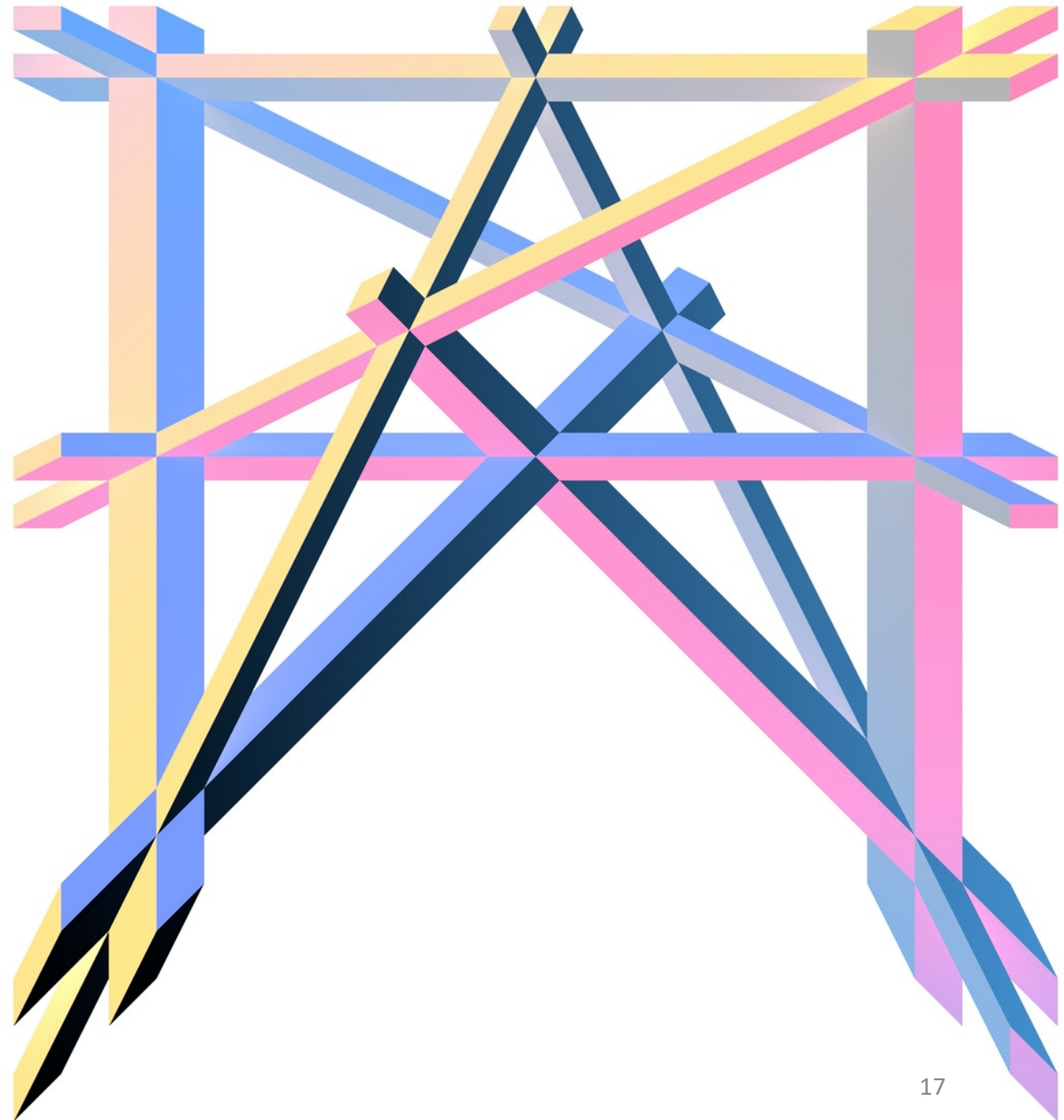
Jokainen piste on 3 suoran ja 3 tason leikkaus

Jokainen suora kulkee 3 pisteen läpi ja on 2 tason leikkaus

Jokainen taso kulkee 6 pisteen ja 4 suoran läpi

Desarguesin konfiguraatio:

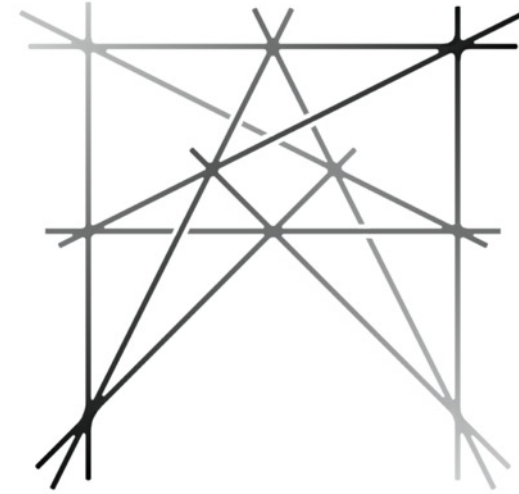
https://en.wikipedia.org/wiki/Desargues_configuration



Tehtävä 3: Kokoa kymmenestä tikusta (grillivartaista, kasvitukikepeistä, tms.) Desarguesin konfiguraatio, jonka jokaisessa 10 risteyksessä siis kohtaa kolme tikkua, ja jokainen tikku kulkee kolmen risteyksen läpi.

- Käytä esimerkiksi pieniä kumilenkkejä tai rautalangan pätkiä risteyksissä
- Kiinnitä erityistä huomiota siihen millä tavoin tikut ohittavat toisensa risteyksissä.
- Jokaisen tikun tulisi olla täysin suorassa, ja toisiaan koskettavien tikkujen tulisi muodostaa mahdollisimman tiivis risteys.
- Liu'uttele ja säädä tikkujen asentoa rakennelmassa niin että kaikki risteykset ovat mahdollisimman etäällä naapureistaan, ja että rakennelman 'huoneet' ovat mahdollisimman selvästi piirtyviä.

Tällainen tikkurakennelma on hyödyllinen paitsi Desarguesin konfiguraation itsenäiseen opiskeluun, myös havainnollinen askartelutehtävä tunnilla.



*Laajennetun viisisolun gnomoninen projektio tuottaa kymmenen pisteen, kymmenen suoran, ja viiden tason muodostaman rakenteen, jota nimitetään **Desarguesin konfiguraatioksi**:*

DESARGUESIN KONFIGURAATIO

10 pistettä

10 suoraa

5 tasoa

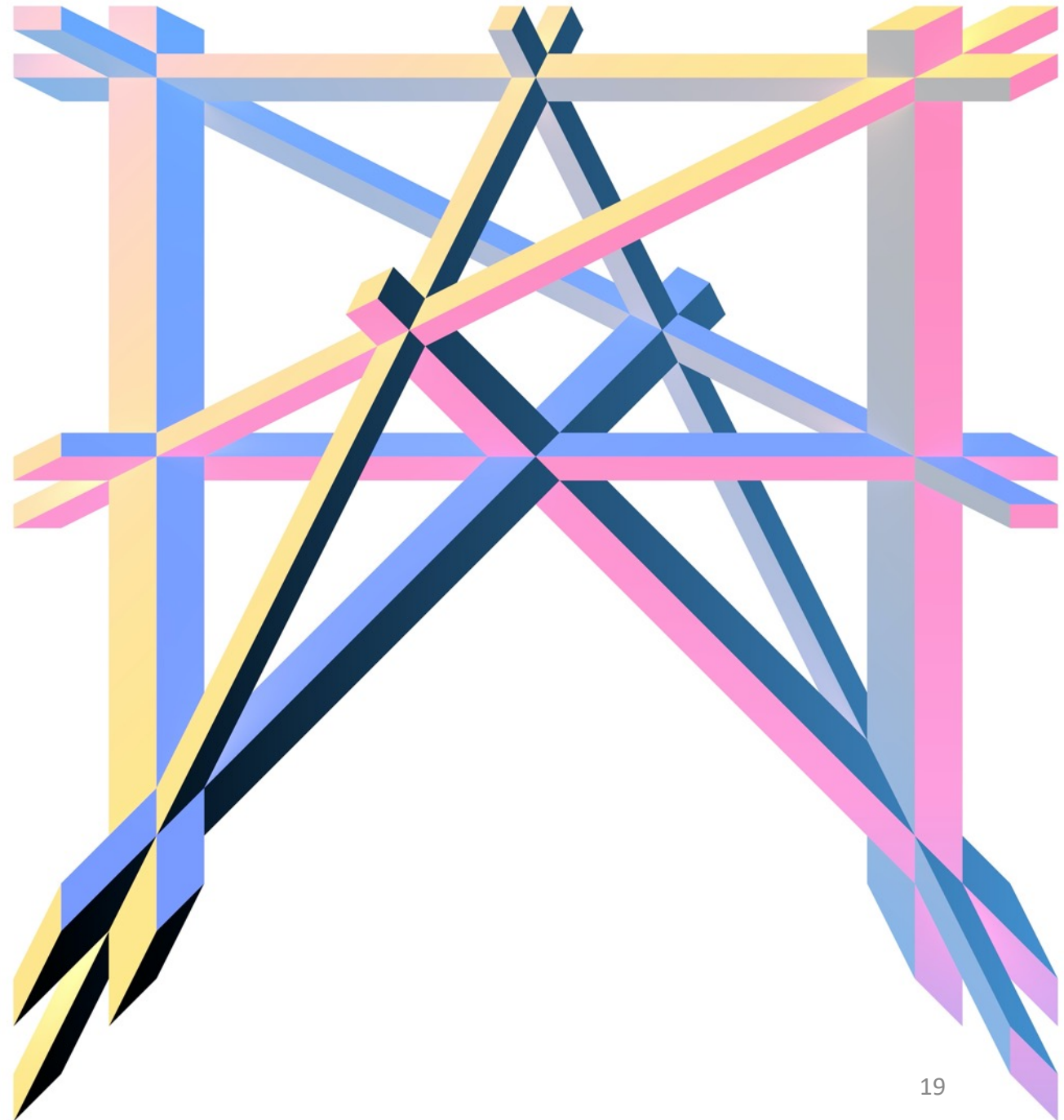
Jokainen piste on 3 suoran ja 3 tason leikkaus

Jokainen suora kulkee 3 pisteen läpi ja on 2 tason leikkaus

Jokainen taso kulkee 6 pisteen ja 4 suoran läpi

Desarguesin konfiguraatio:

https://en.wikipedia.org/wiki/Desargues_configuration



Huomaa että Desarguesin konfiguraation jokainen taso on laajennetun viisisolun kuboktaedrisen poikkileikkauksen gnomoninen projektio, eli 'täydellinen nelikulmio' (katso sivu 10).





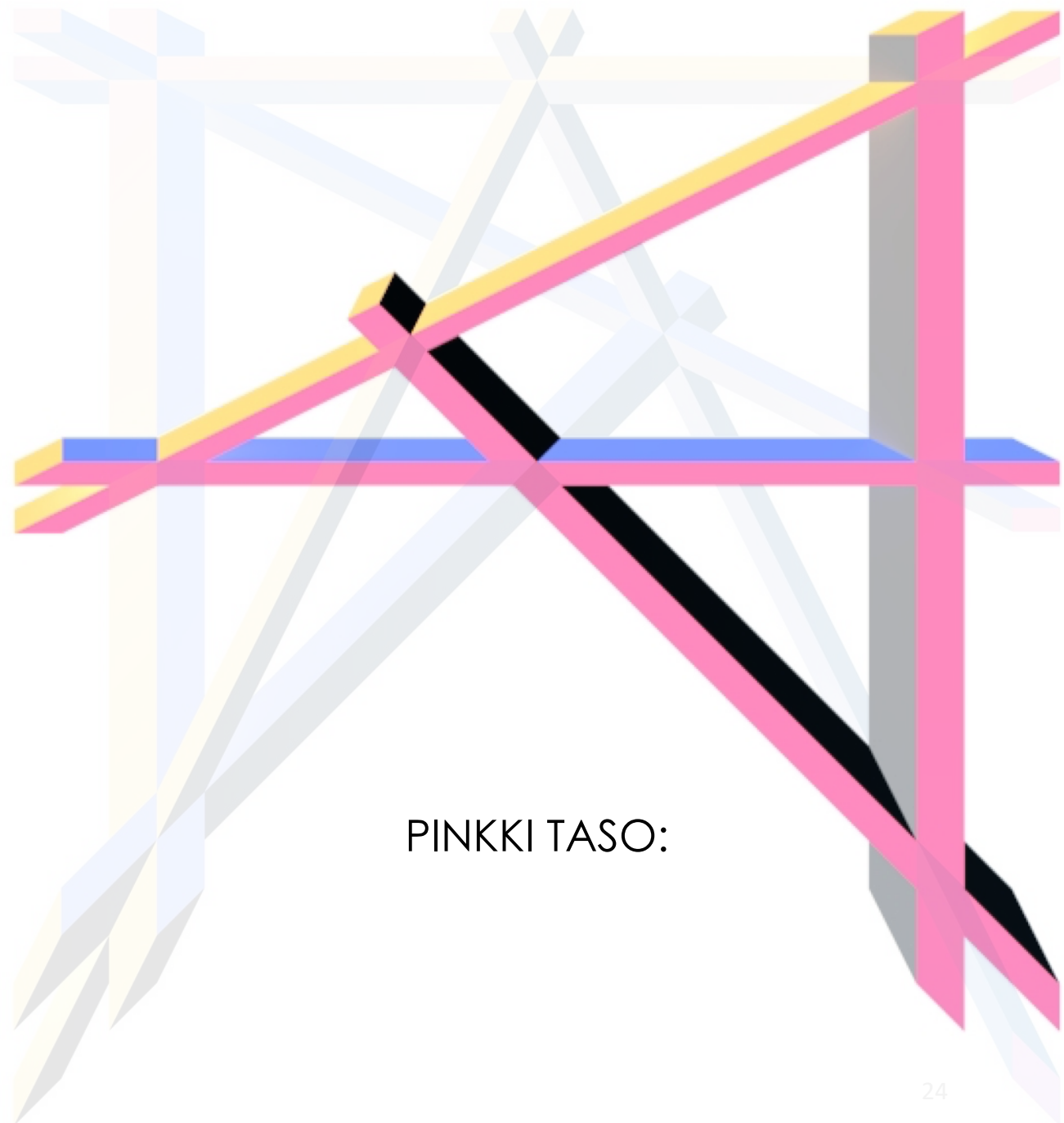
SININEN TASO:



HARMAA TASO:



KELTAINEN TASO:



PINKKI TASO:

Tehtävä 4: Etsi Desarguesin konfiguraatiosta tetraedrin muotoisia tiloja, sekä kolmioprisman muotoisia tiloja

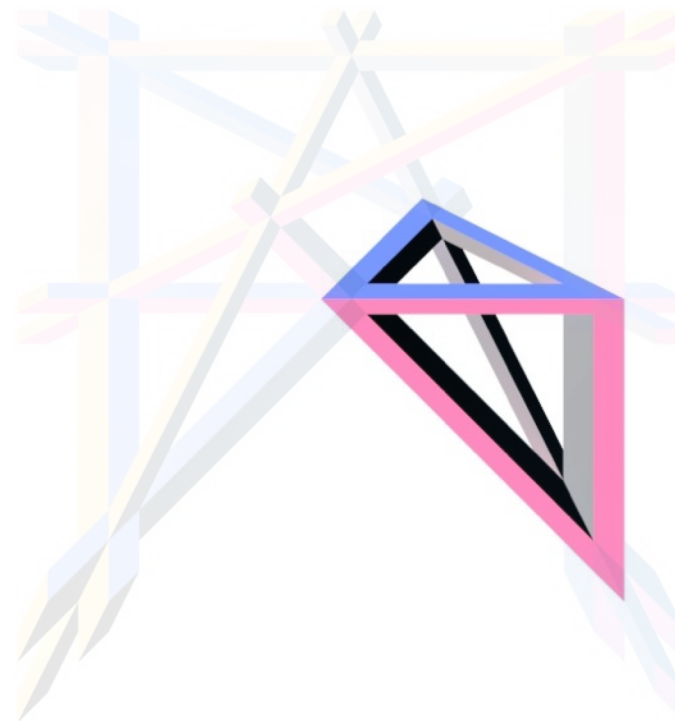
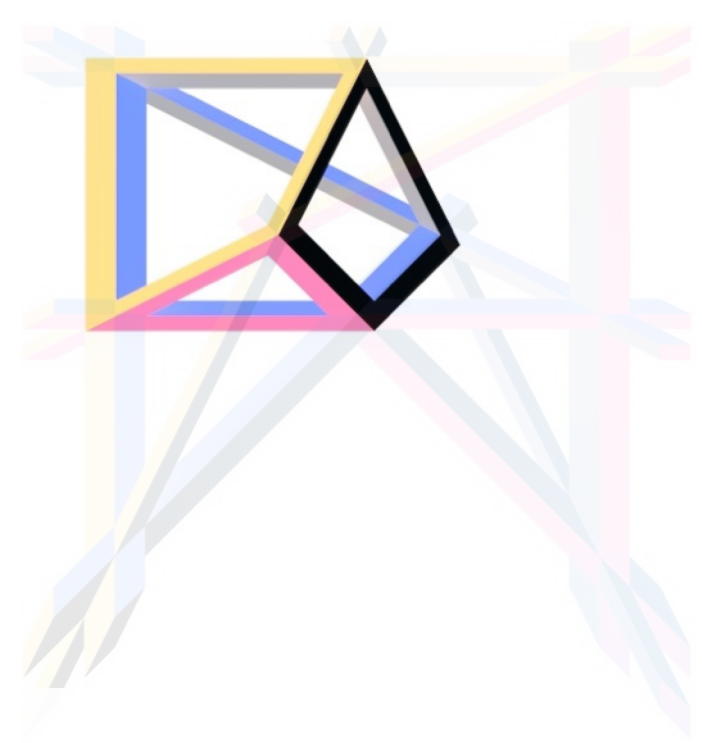
Pidä mielessä jälleen että nämä monitahokkaat eivät välttämättä ole 'ehjiä', vaan niiden osat saattavat sijaita konfiguraation vastakkaisilla puolilla (katso sivu 5).

KOLMIOPRISMA

6 kärkipistettä

9 särmää

5 tahkoa (kolmioita ja neliöitä)



TETRAEDRI

4 kärkipistettä

6 särmää

4 tahkoa (kolmioita)

Tetraedri: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron>

Kolmioprisma: https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_prism

Desarguesin konfiguraatio antaa visuaalisen ilmiön
Desarguesin lauseelle, joka on yksi tärkeimmistä
projektiivisen geometrian ja perspektiiviopin teoreemoista:

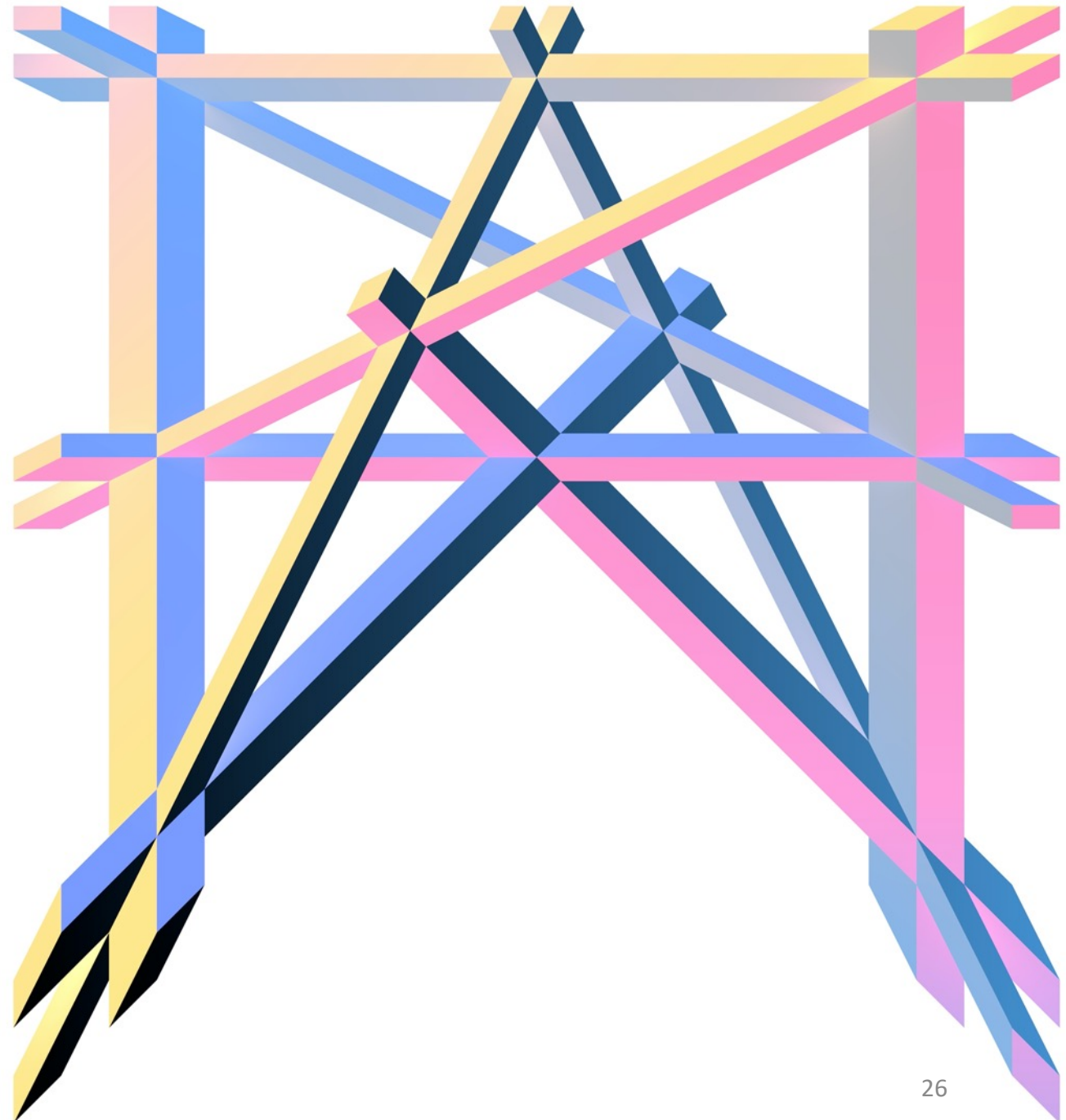
DESARGUESIN LAUSE

Jos kahden kolmion vastinpisteitä yhdistävät suorat kohtaavat
yhdessä pisteessä, sijaitsevat kolmioiden vastinsivujen
leikkauspisteet yhdellä suoralla.

Toisin sanoen: jos kaksi kolmiota ovat perspektiivissä pisteen
suhteen (perspektiviteettikeskus), ne ovat myös perspektiivissä
suoran suhteen (perspektiviteettiakseli).

Perspektiviteetti: <https://en.wikipedia.org/wiki/Perspectivity>

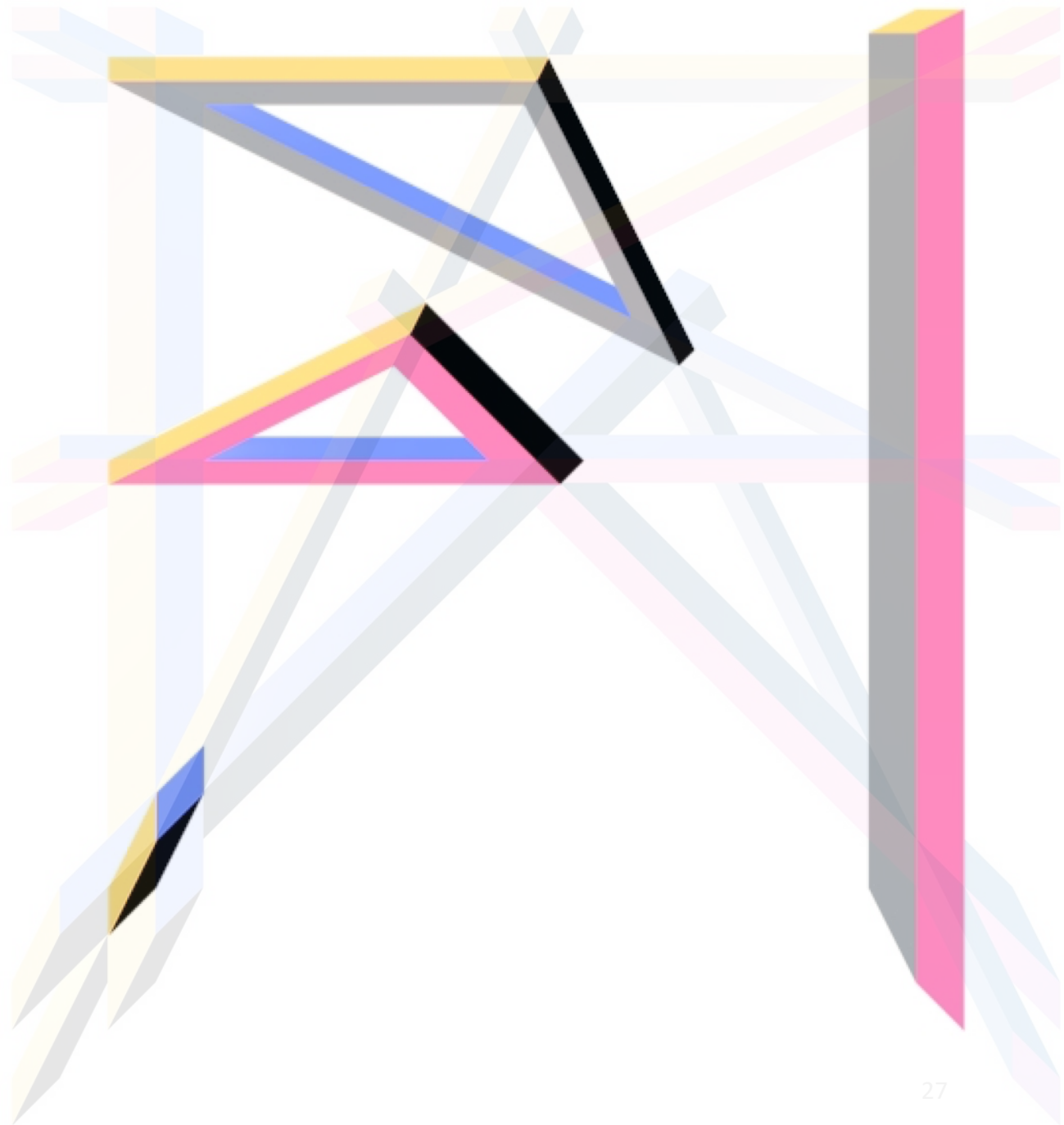
Desarguesin lause: https://en.wikipedia.org/wiki/Desargues%27_theorem



Kuvassa oikealla on yksi perspektiiviteettikeskus, kaksi kolmiota jotka ovat perspektiivissä tuosta pisteestä nähden, sekä vastaava perspektiiviakseli.

Tehtävä 5: Etsi Desarguesin konfiguraation jokaista risteystä kohti kaksi kolmiota, jotka ovat perspektiivissä tuosta pisteestä käsin, sekä suora jolla sijaitsevat kolmioiden vastinsivujen leikkauspisteet (perspektiiviteettiakseli).

Huomaa että kolmiot eivät välttämättä ole 'ehjiä', vaan niiden osat saattavat sijaita konfiguraation vastakkaisilla puolilla (katso sivu 5).



VIIDES ULOTTUVUUS: KOROTETTU DESARGUESIN KONFIGURAATIO 5-SIMPLEKSISTÄ

Lopuksi tarkastelemme Desarguesin konfiguraation korkeampiulotteista vastinetta.

Tämän korotetun konfiguraation valmistamme muutamalla *viisiulotteisen* 5-simpleksin laajennetuksi 5-simpleksiksi, ja projisoimme sen gnomonisesti *neliulotteiseen* kuva-avaruuteen.

Jos jokin kohta tässä korkeampiulotteisissa tilanteissa tuntuu jälleen haastavalta, palaa alempiulotteiseen tilanteeseen ja tarkastele miten tuo nimenomainen asia toimii siellä. Ratkaisu ongelmaasi löytyy luultavasti taas juuri tätä kautta.

*Aloitamme **5-simpleksistä**,
joka on säännöllinen
viisiulotteinen polytooppi.*

5-SIMPLEKSI

6 kärkipistettä

15 särmää

20 tahkoa (kolmioita)

15 solua (tetraedrejä)

6 hypersolua (viisisoluja)

*Kun 5-simpleksi laajennetaan, sen kuusi hypersolua liikkuvat säteittäisesti ulospäin. 5-simpleksin kuusi kärkipistettä avautuvat uusiksi viisisoluiksi, viisitoista särmää ja viisitoista solua avautuvat kumpikin tetraedriprismoiksi. 5-simpleksin kaksikymmentä kolmiotahkoa muuttuvat 3–3-duoprismoiksi. Näin siis **laajennettu 5-simpleksi** koostuu 30 kärkipisteestä, 120 särmästä, 210 tahkosta, 180 solusta, ja 62 hypersolusta. Samassa laajennetun 5-simpleksin keskipisteen läpi kulkevassa neliulotteisessa viipaleessa sijaitsevat solut muodostavat laajennetun viisisolun, ja laajennetulla 5-simpleksillä on kuusi tällaista laajennetun viisisolun muotoista poikkileikkausta.*

5-SIMPLEKSI

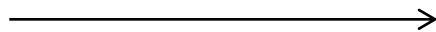
6 kärkipistettä

15 särmää

20 tahkoa (kolmioita)

15 solua (tetraedrejä)

6 hypersolua (viisisoluja)



LAAJENNETTU 5-SIMPLEKSI

30 kärkipistettä

120 särmää

210 tahkoa (120 kolmiota + 90 neliötä)

180 solua (60 tetraedriä + 120 kolmioprismaa)

62 hypersolua (12 viisisolua + 30 tetraedriprismaa + 20 '3–3-duoprismaa')

*Laajennetun 5-simpleksin gnomoninen projektio tuottaa 15 pisteen, 20 suoran, 15 tason, ja 6 hypertason muodostaman rakenteen, jota voimme nimittää **korotetuksi Desarguesin konfiguraatioksi**. Huomaa että konfiguraation jokainen hypertaso on laajennetun 5-simpleksin laajennetun viisisolun muotoisen poikkileikkauksen gnomoninen projektio.*

'KOROTETTU' DESARGUESIN KONFIGURAATIO

15 pistettä

20 suoraa

15 tasoa

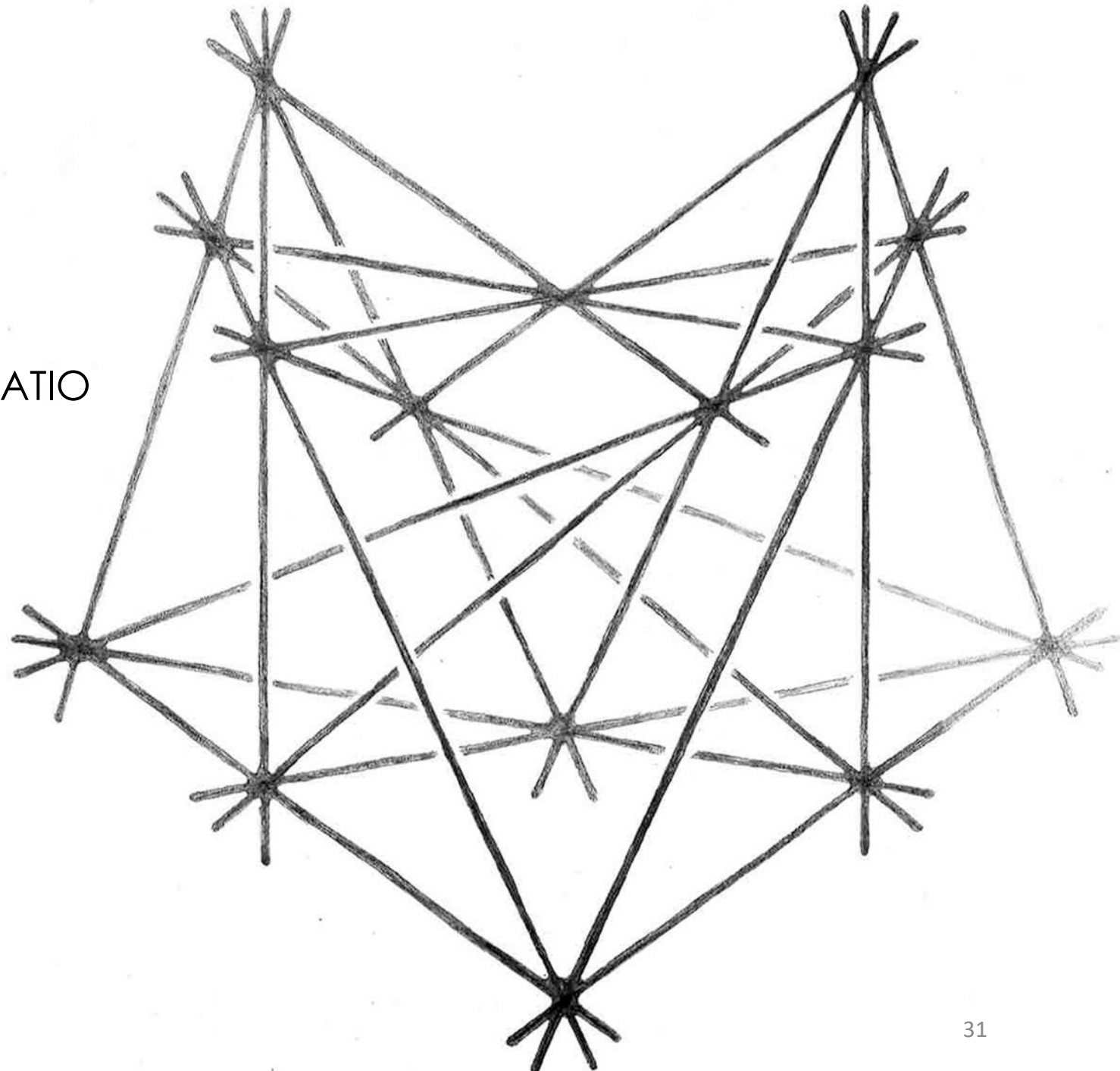
6 hypertasoa

4 suoraa, 6 tasoa, and 4 hypertasoa per piste

3 pistettä, 3 tasoa, and 3 hypertasoa per suora

6 pistettä, 4 suoraa, and 2 hypertasoa per taso

10 pistettä, 10 suoraa, and 5 tasoa per hypertaso

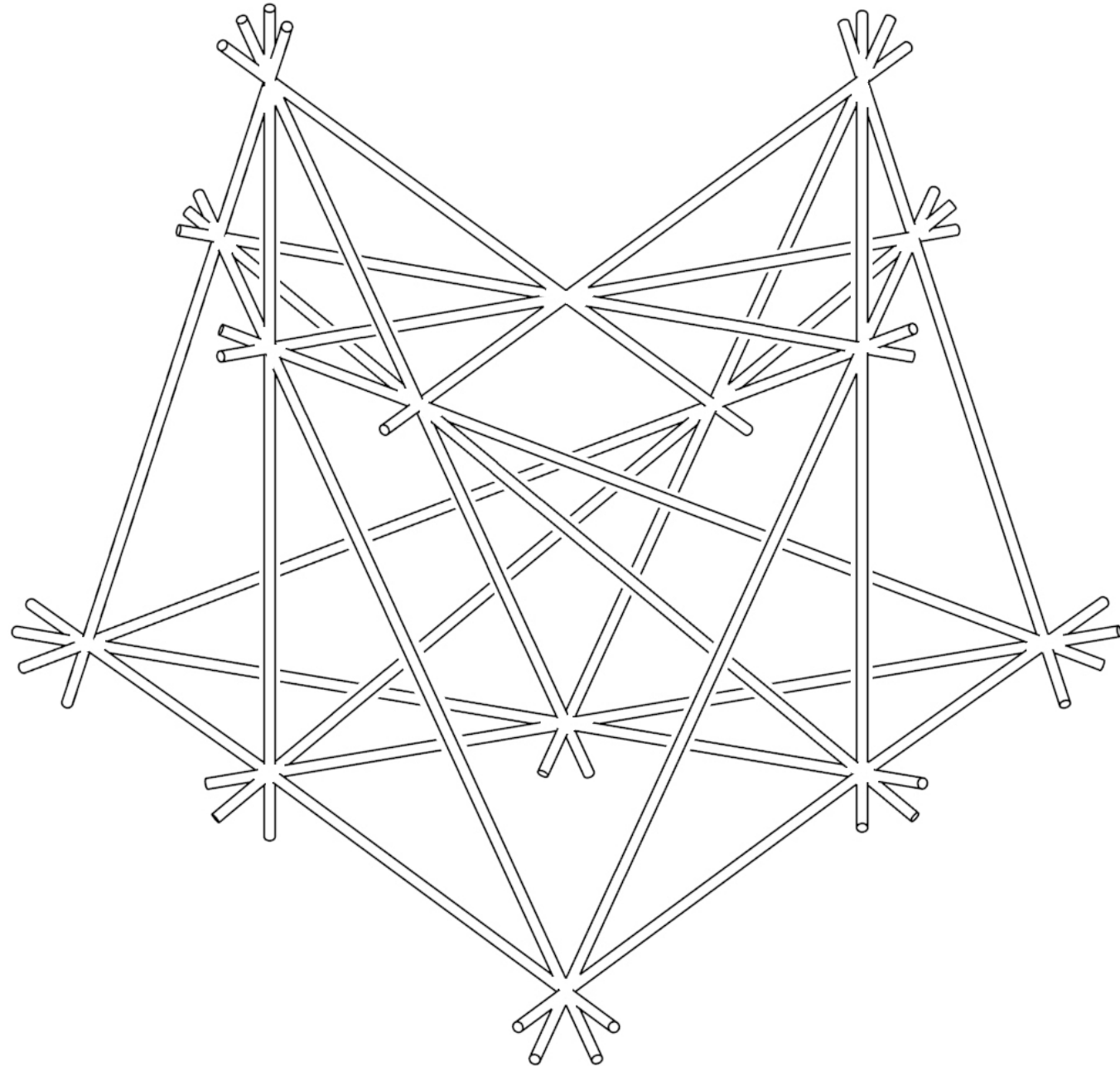


Tulosta tiedosto **KorotettuDesargues.jpg** avuksi seuraavia tehtäviä varten.

Voit työskennellä tehtävänantojen parissa esimerkiksi yliviivaustusseja tai puuvärikyniä apuna käyttäen.

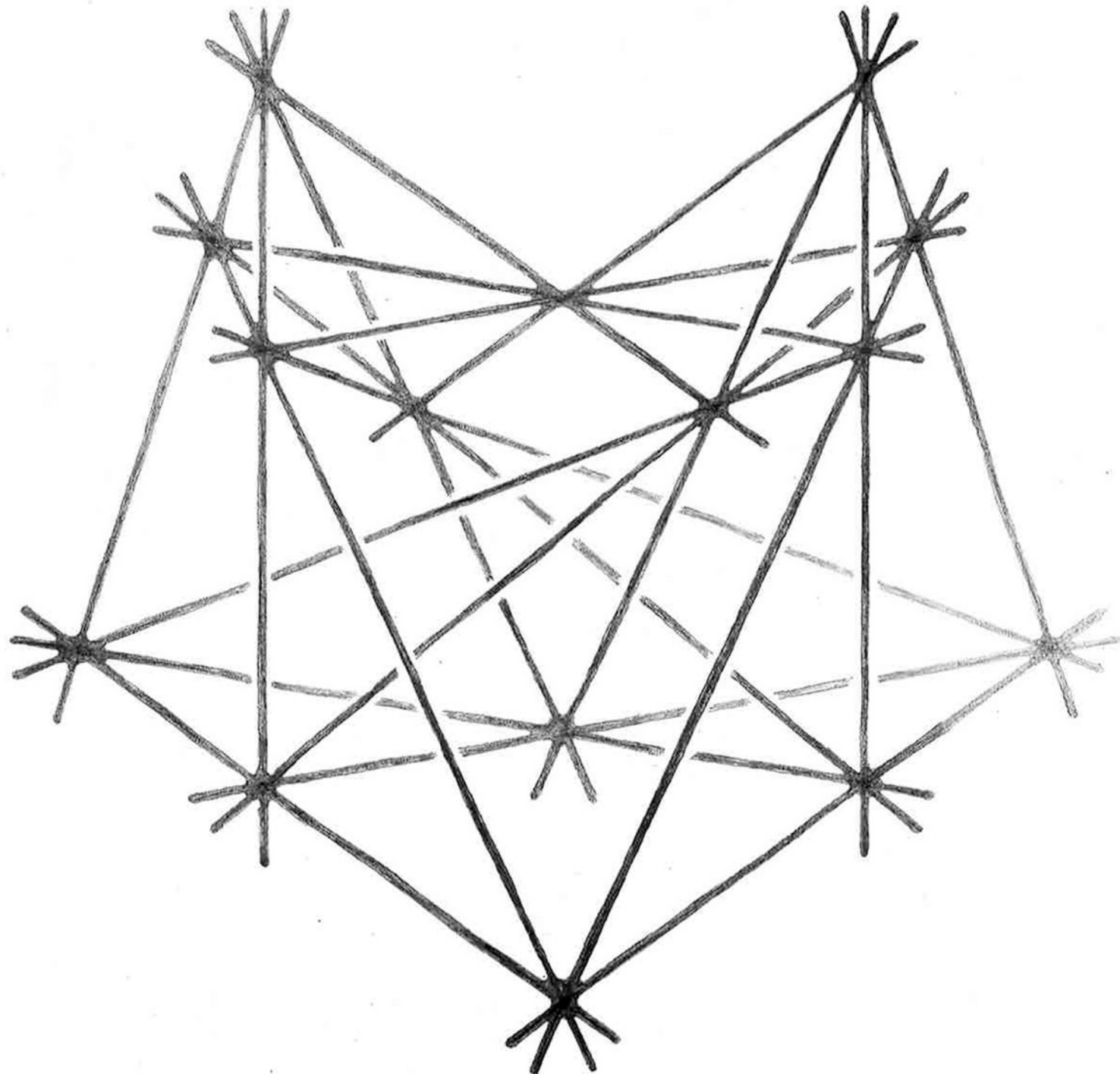


yliviivaustusseja



NELIULOTTEISET HYPERSOLUT LAAJENNETUSSA 5-SIMPLEKSISSÄ?

Seuraavaksi tarkastelemme minkälaisista
neliulotteisista hypersoluista laajennettu
5-simpleksi koostuu.



VIISISOLU

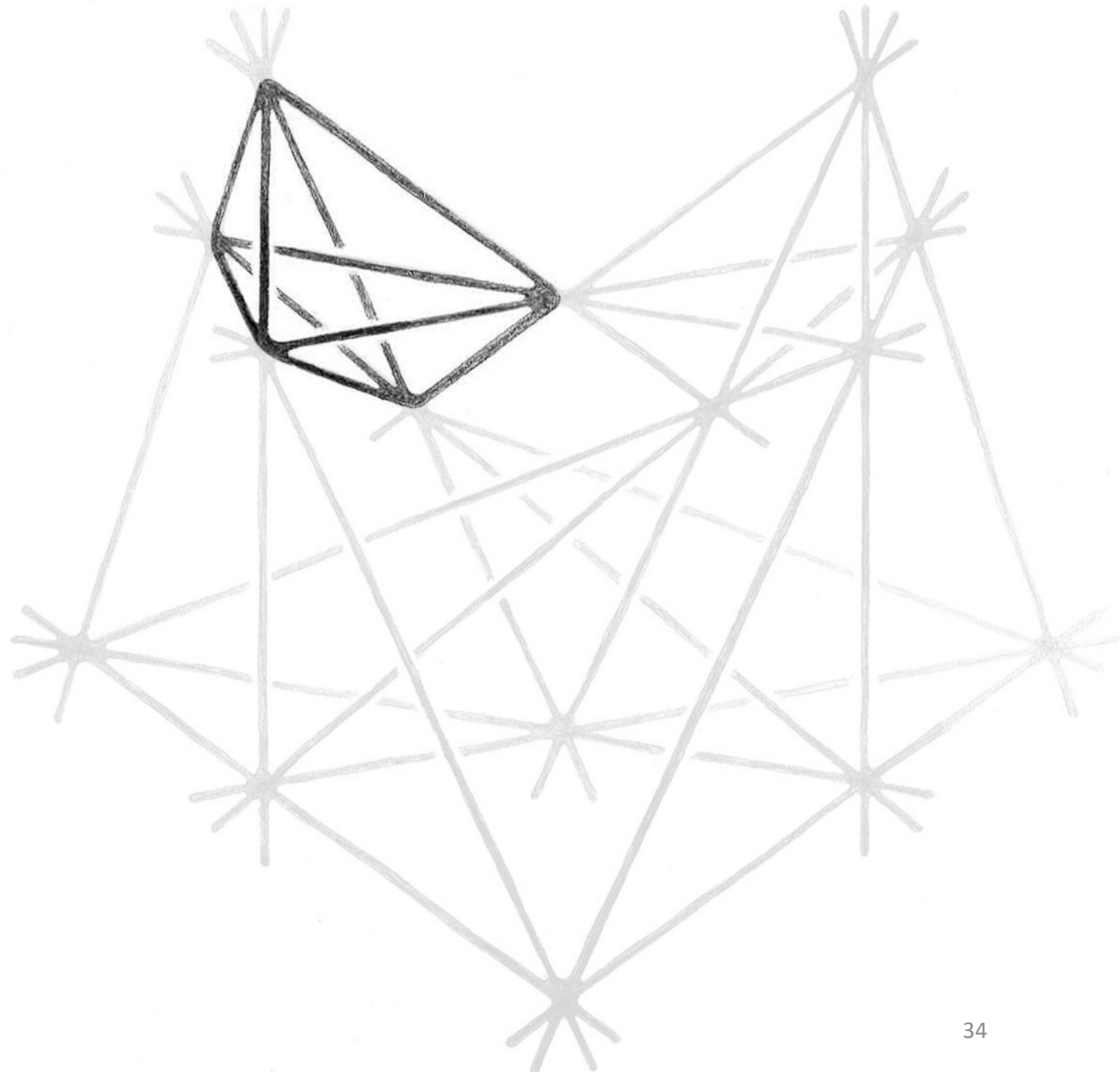
5 kärkipistettä

10 särmää

10 tahkoa (kolmioita)

5 solua (tetraedrejä)

Tehtävä 6: Etsi lisää viisisoluja. Huomaa että nämä solut eivät välttämättä ole ehjiä kuten viereisessä kuvassa, vaan niiden osat saattavat sijaita rakennelman vastakkaisilla puolilla. Montako löydät?



TETRAEDRIPRISMA

8 kärkipistettä

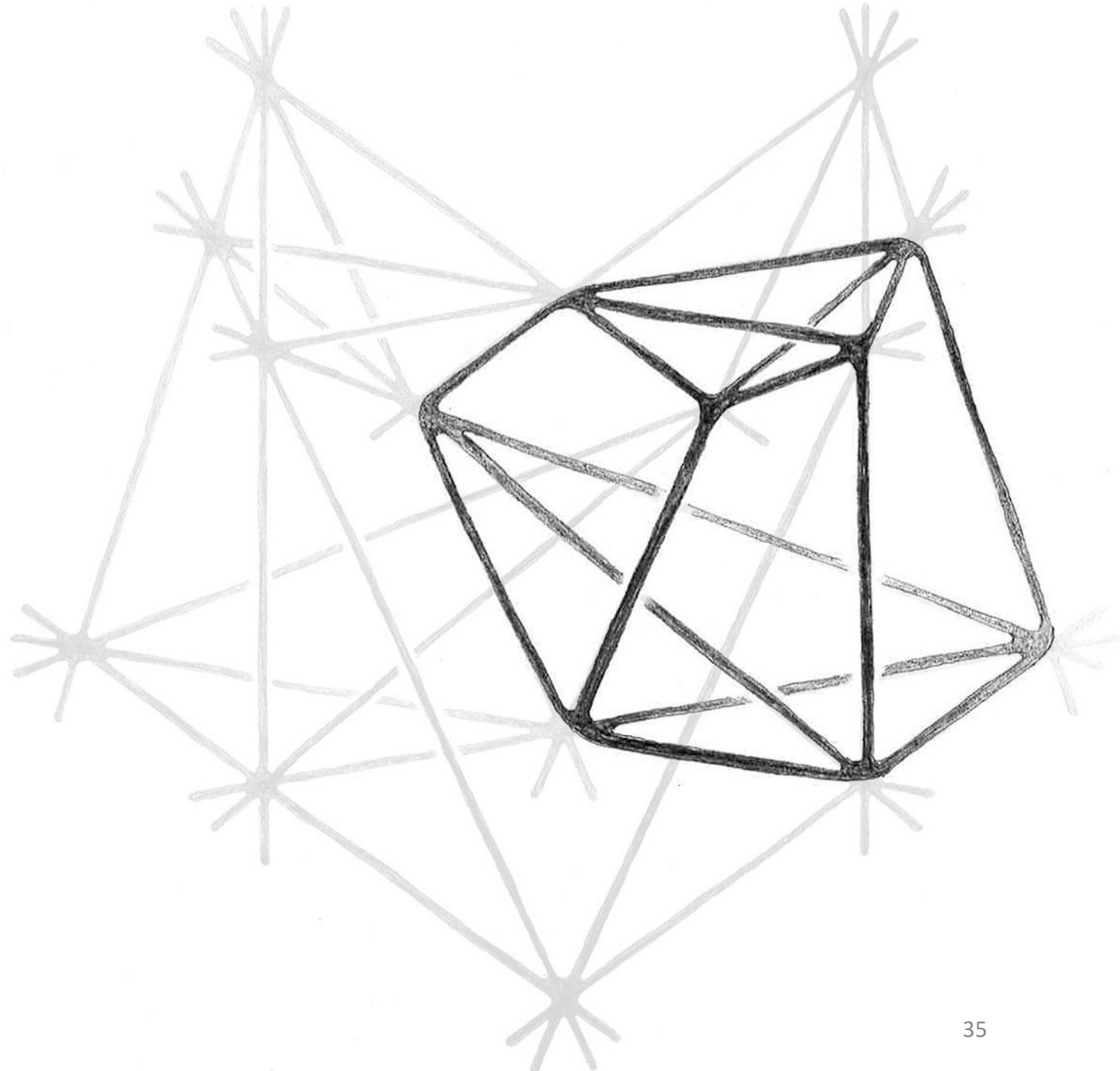
16 särmää

14 tahkoa (8 kolmiota + 6 neliötä)

6 solua (2 tetraedriä + 4 kolmioprismaa)

Tehtävä 7: Etsi lisää tetraedriprismasoluja.

Huomaa että nämä solut eivät välttämättä ole ehjiä kuten viereisessä kuvassa, vaan niiden osat saattavat sijaita rakennelman vastakkaisilla puolilla. Montako löydät?



3-3-DUOPRISMA

9 kärkipistettä

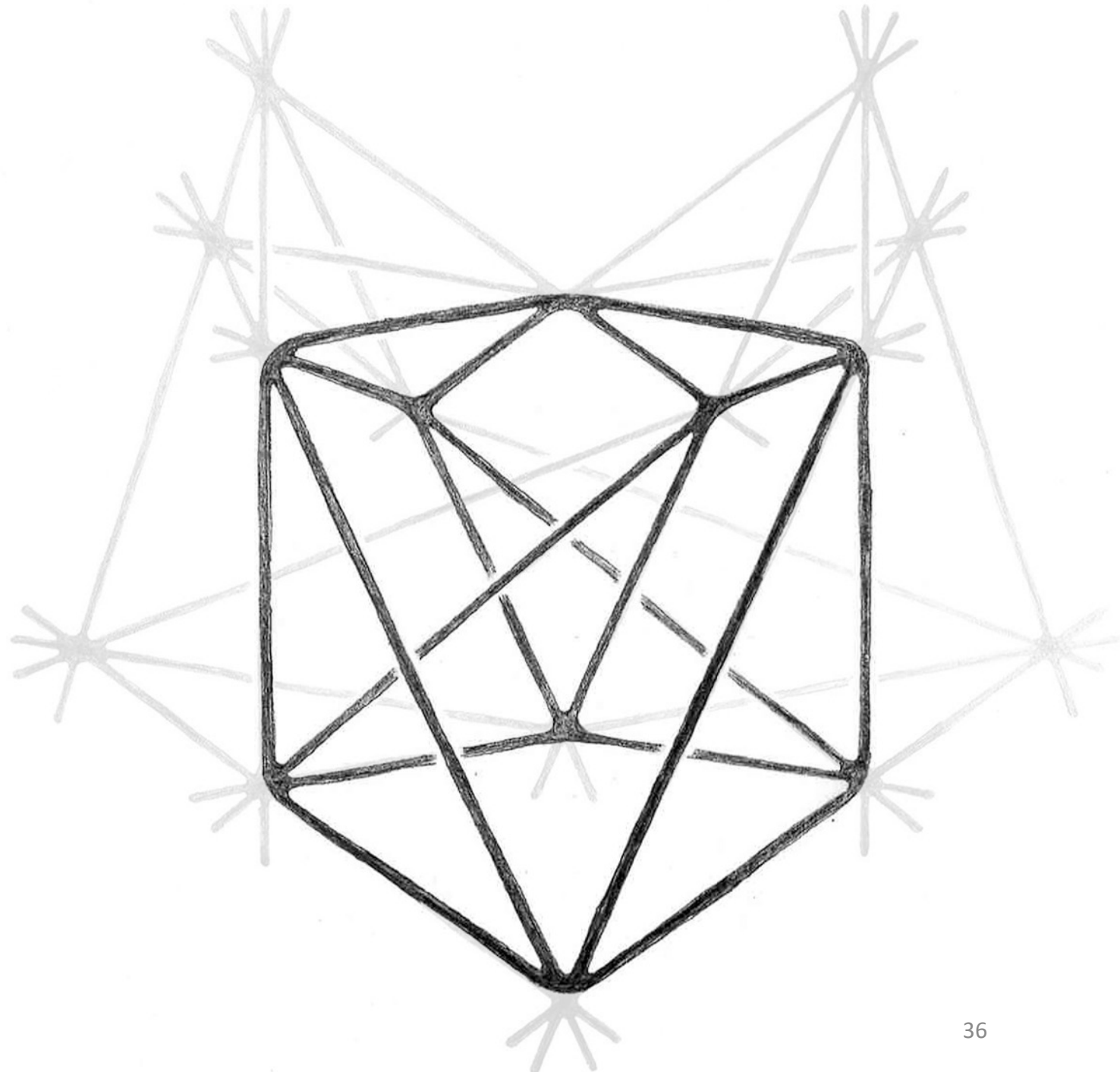
18 särmää

15 tahkoa (9 kolmiota + 6 neliötä)

6 solua (kolmioprismoja)

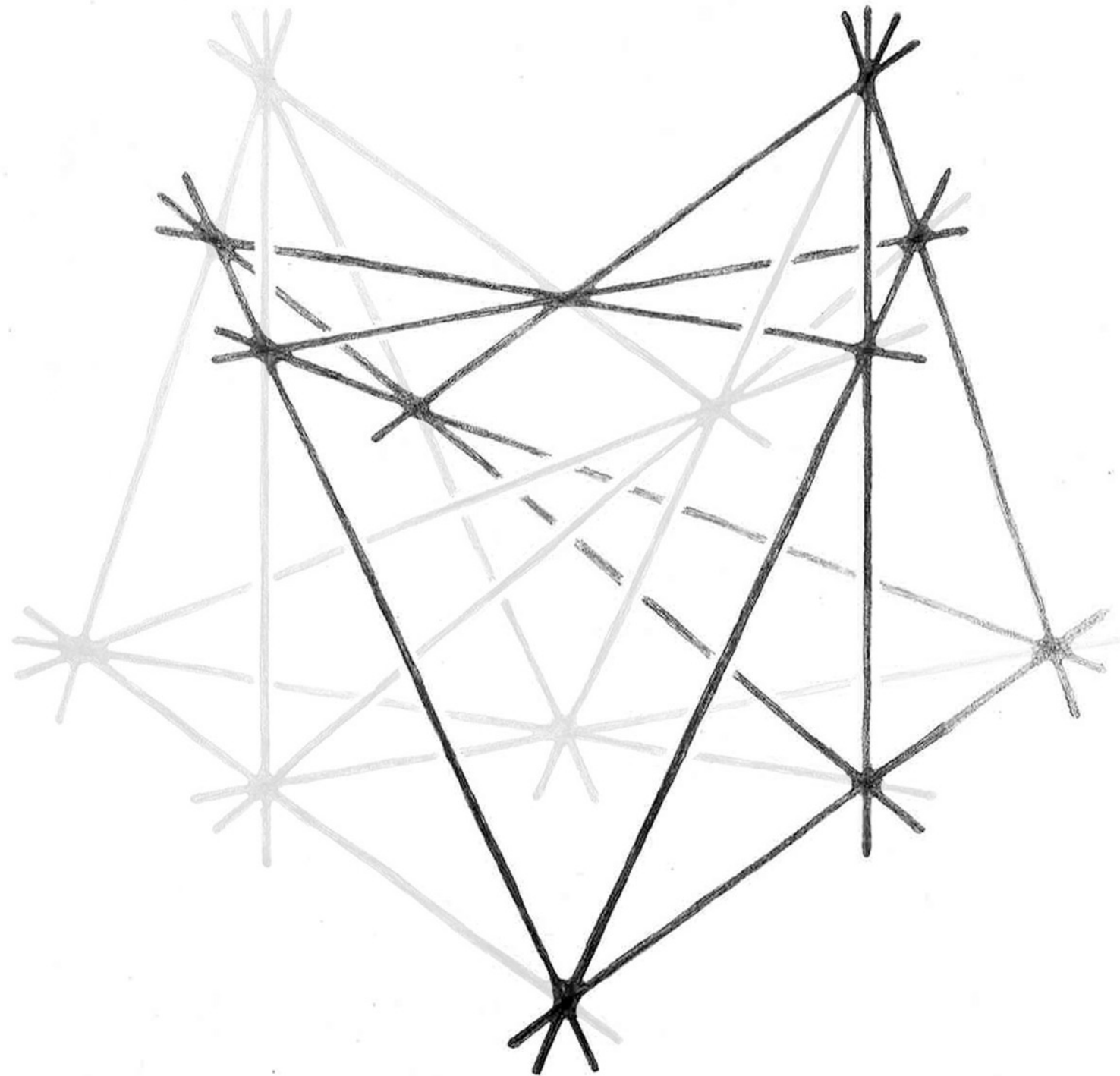
Tehtävä 8: Etsi lisää 3–3-duoprismoja.

Huomaa että nämä solut eivät välttämättä ole ehjiä kuten viereisessä kuvassa, vaan niiden osat saattavat sijaita rakennelman vastakkaisilla puolilla. Montako löydät?

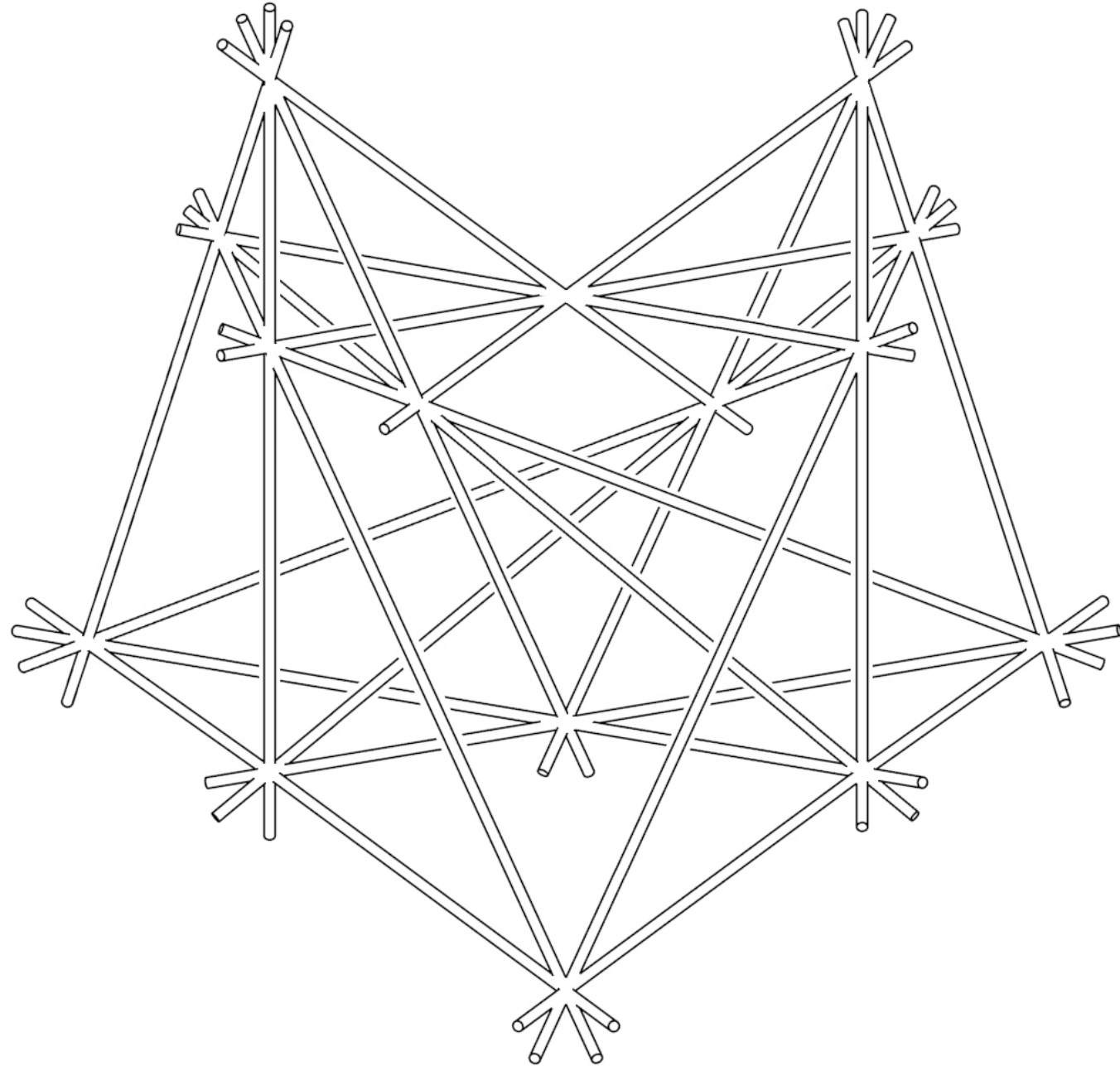


Korotetun Desarguesin konfiguraation jokainen hypertaso (siis kolmiulotteinen viipale) on perinteinen Desarguesin konfiguraatio.

Tehtävä 9: Etsi jokainen Desarguesin konfiguraatio. Montako niitä on?



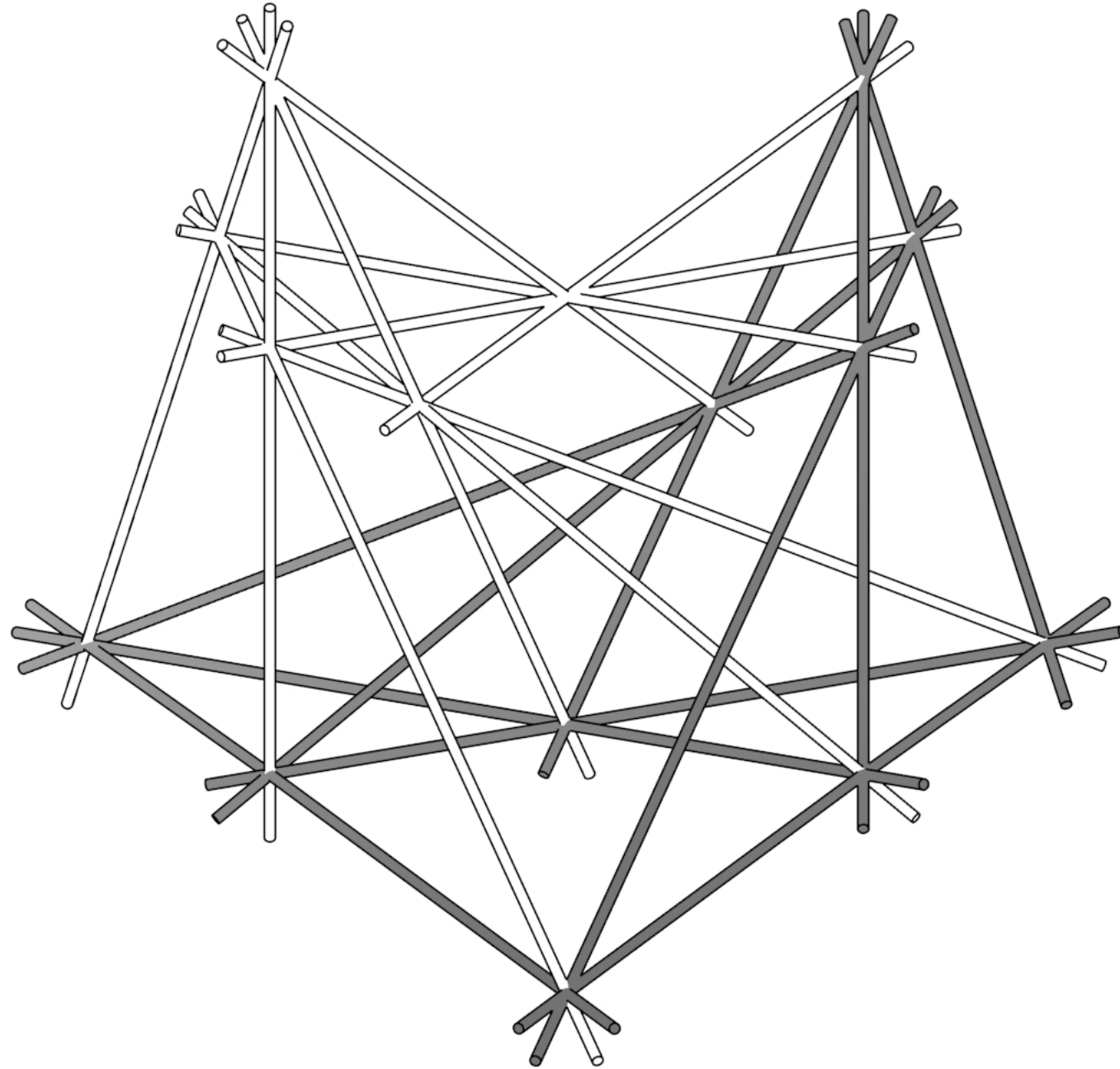
Seuraavaksi tarkastelemme joitakin konstruktioita, teoreemoja ja ilmiöitä, joita korotettu Desarguesin konfiguraatio mahdollistaa.



DESARGUESIN KONFIGURAATION KONSTRUOINTI

Olkoon neliulotteisessa avaruudessa 5 mielivaltaista pistettä (ylävasemmalla). Nämä pisteet määrittävät 10 suoraa ja 10 tasoa (valkoiset suorat).

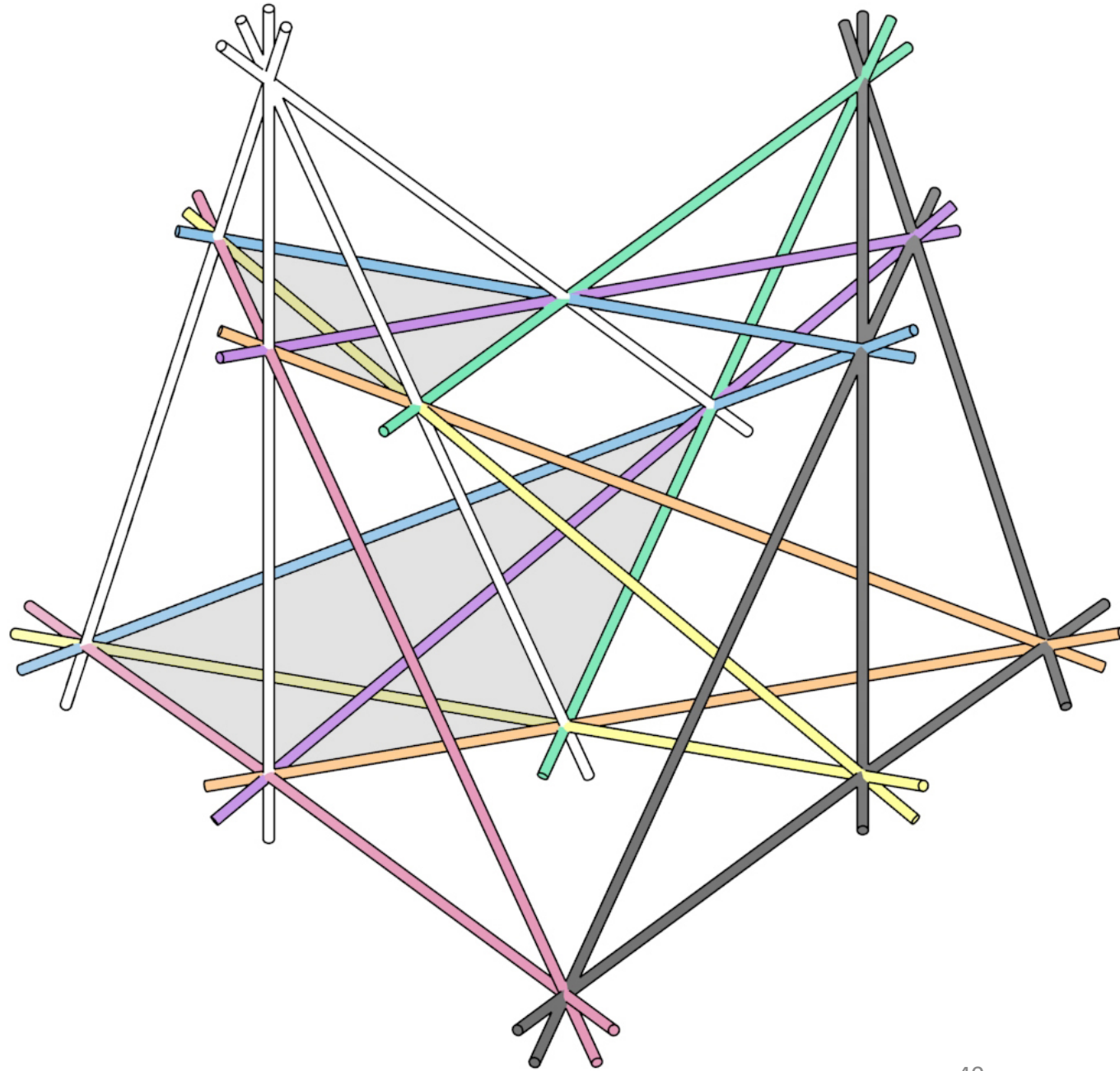
Jos nuo suorat ja tasot leikataan hypertasolla satunnaisesta kohdasta, niin tuon 10 pisteestä ja 10 suorasta koostuvan poikkileikkauksen muoto on Desargues konfiguraatio (musta).



KAHDEN TETRAEDRIN PERSPEKTIVITEETTI

Jos kaksi tetraedriä ovat perspektiivissä pisteen suhteen (valkoisten suorien risteys ylävasemmalla), niin silloin myös tetraedrien vastinsivujen leikkauspisteet sijaitsevat samalla tasolla (mustien suorien taso oikealla).

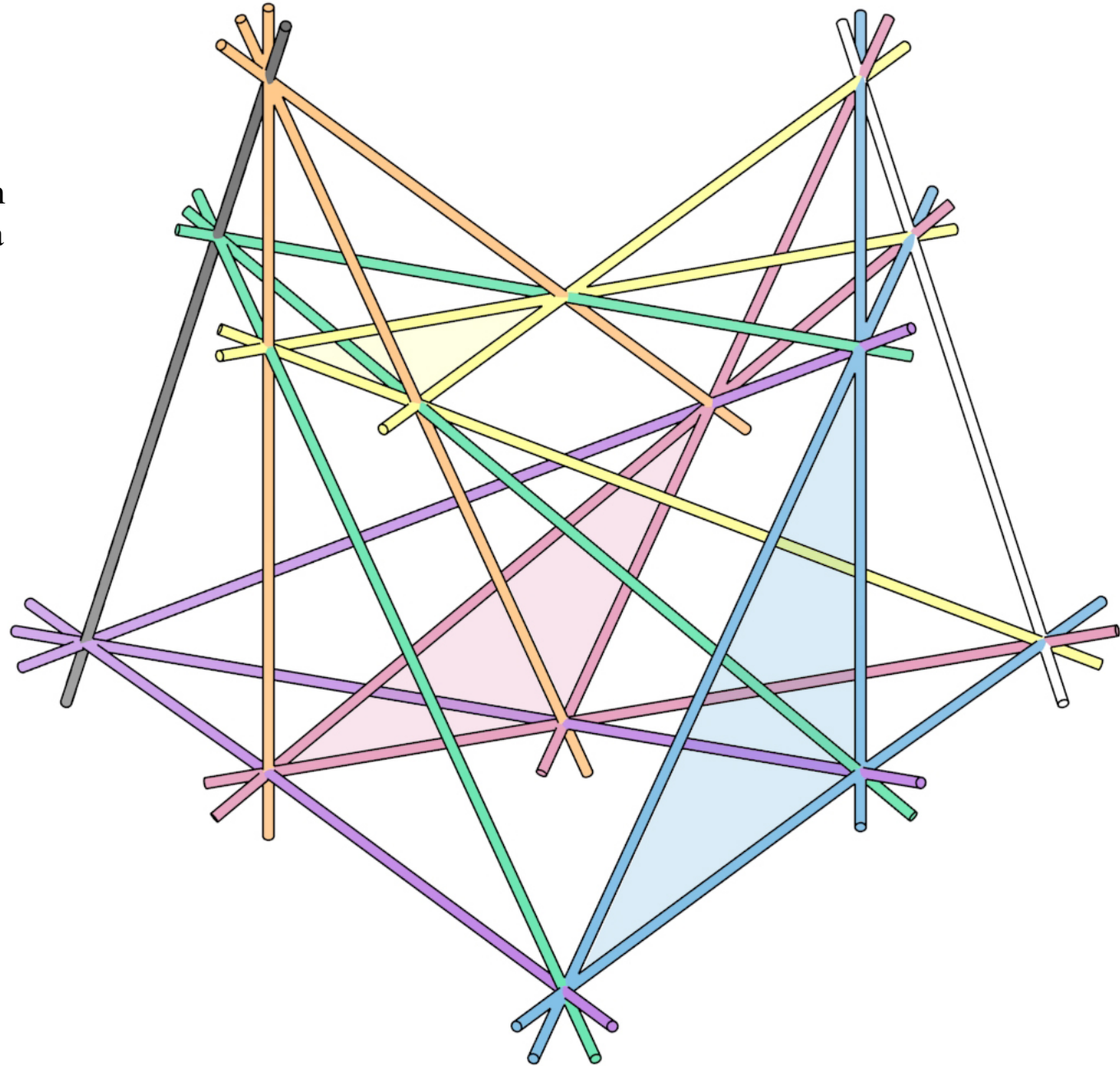
Tehtävä 10: Etsi rakenteen jotakin toista risteystä kohti kaksi tetraedriä, jotka ovat perspektiivissä tuosta pisteestä käsin, sekä taso jolla sijaitsevat tetraedrien vastinsivujen leikkauspisteet. Huomaa että tetraedrit eivät välttämättä ole 'ehjiä' kuten viereisessä kuvassa, vaan niiden osat saattavat sijaita rakennelman vastakkaisilla puolilla.



KOLMEN KOLMION PERSPEKTIVITEETTI

Jos kolmen kolmion (sininen, punainen, keltainen) määrittämät kolme perspektiviteettikeskusta (oranssi, vihreä, violetti) sijaitsevat samalla suoralla (musta suora vasemmalla), niin silloin myös kolmioiden vastinsivujen leikkauspisteet sijaitsevat samalla suoralla (valkoinen suora oikealla).

Tehtävä 11: Etsi rakenteen jotakin toista suoraa kohti kolme kolmiota, joiden määrittämät kolme perspektiviteettikeskusta sijaitsevat tuolla suoralla, sekä toinen suora jolla sijaitsevat kolmioiden vastinsivujen leikkauspisteet. Huomaa että kolmiot eivät välttämättä ole ehjiä kuten viereisessä kuvassa, vaan niiden osat saattavat sijaita rakennelman vastakkaisilla puolilla.

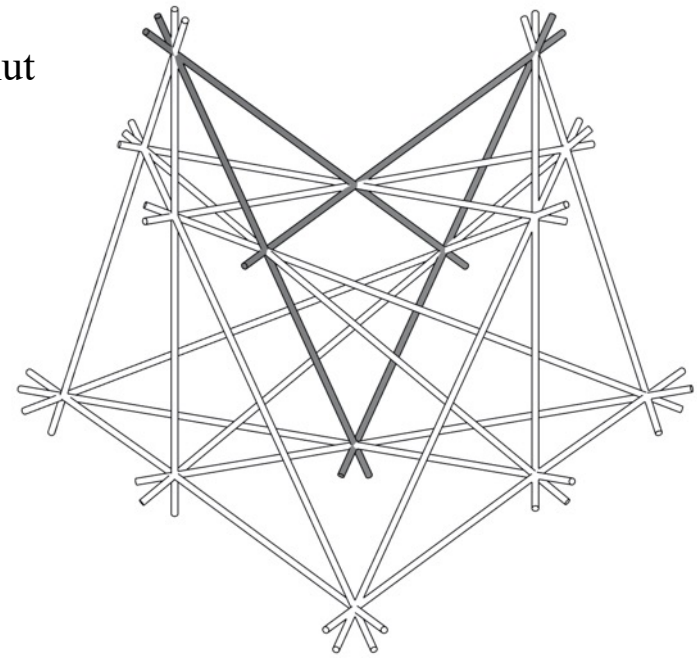


PROJEKTIIVINEN RISTINOLLA

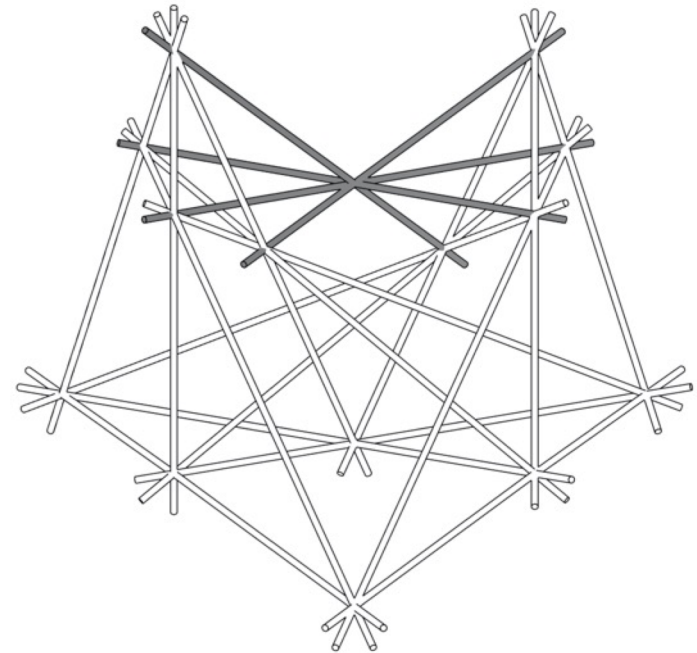
Kaksi pelaajaa valitsee yhden värin, ja värittää vuorotellen rakenteen suoria. Ristinollan voittaa pelaaja joka ensimmäisenä valloittaa kokonaisen tason tai kokonaisen risteyksen.

Tehtävä 12: Pelaa muutama peli projektiivista ristinollaa parin kanssa. Löydätkö voiton takaavaa pelistrategiaa? Selvitä voiko ensimmäisenä aloittanut pelaaja aina voittaa, jos hän pelaa parhaalla mahdollisella tavalla? Jos näin on, voisiko pelin sääntöjä muuttaa niin että se päättyy aina tasapeliin, jos kumpikaan pelaaja ei tee virhettä? Ehdota uusia sääntöjä.

Musta pelaaja on valloittanut kokonaisen tason



Musta pelaaja on valloittanut kokonaisen risteyksen



KIRJALLISUUTTA:

P. O. Bell. “Generalized Theorems of Desargues for n -Dimensional Projective Space.” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 6, no. 5, 1955, pp. 675-681.

A. Boole Stott. *Geometrical Deduction of Semiregular from Regular Polytopes and Space Fillings*. Verhandeligen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1910, p. 5.

H. L. Dorwart. *The Geometry of Incidence*. Prentice-Hall, 1966.

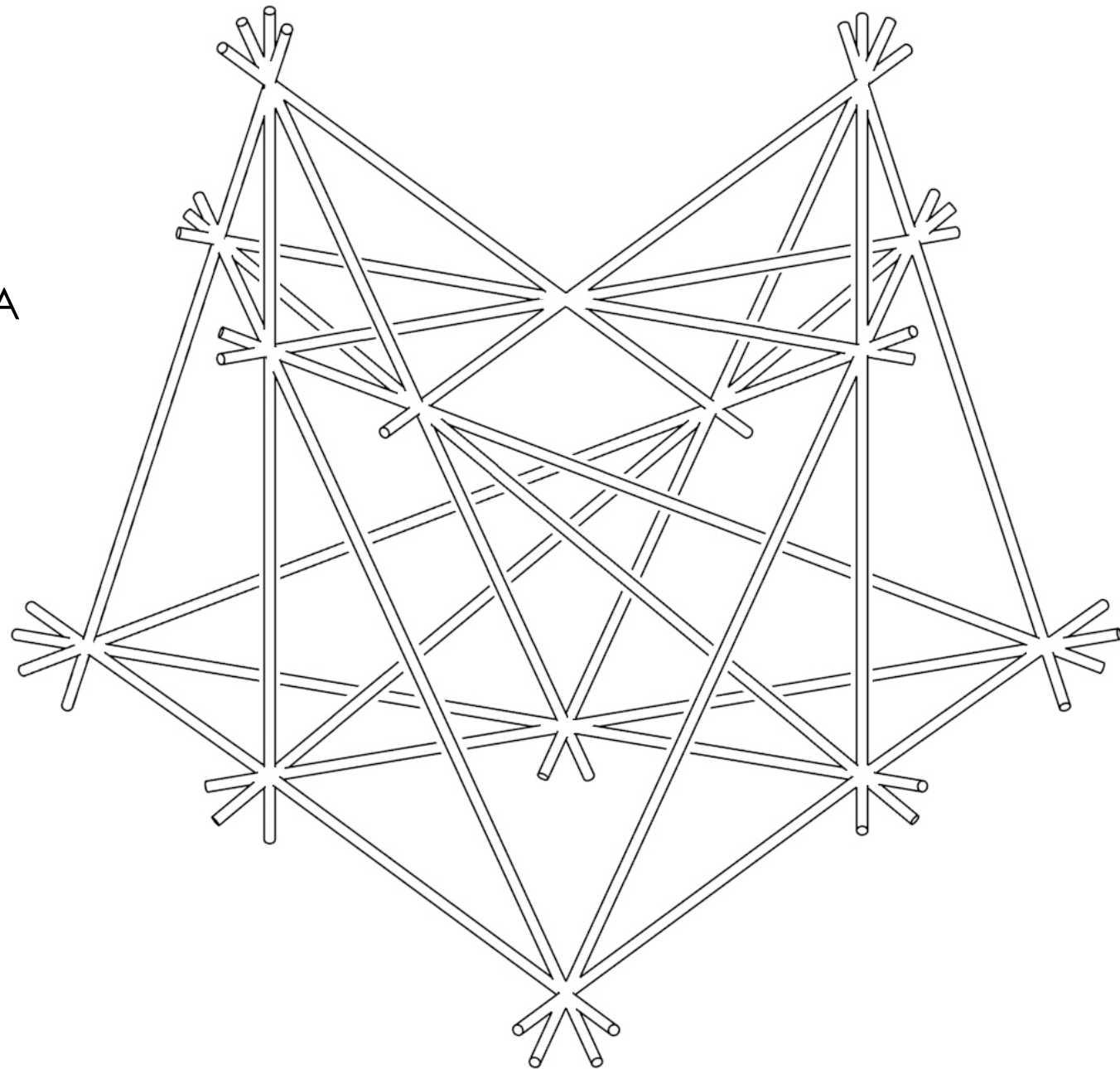
L. Edwards. *Projective Geometry*. Floris Books, 2003.

D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing Company, 1990.

VAPAAEHTOINEN TEHTÄVÄ:

KOROTETTUA DESARGUESIN
KONFIGURAATIOTA HAVAINNOLLISTAVA
PUTKIRAKENNELMA

20 läpinäkyvää akryyliputkea
38 maalattua puutikkua



TÄRKEIMMÄT RAKENNUSMATERIAALIT:



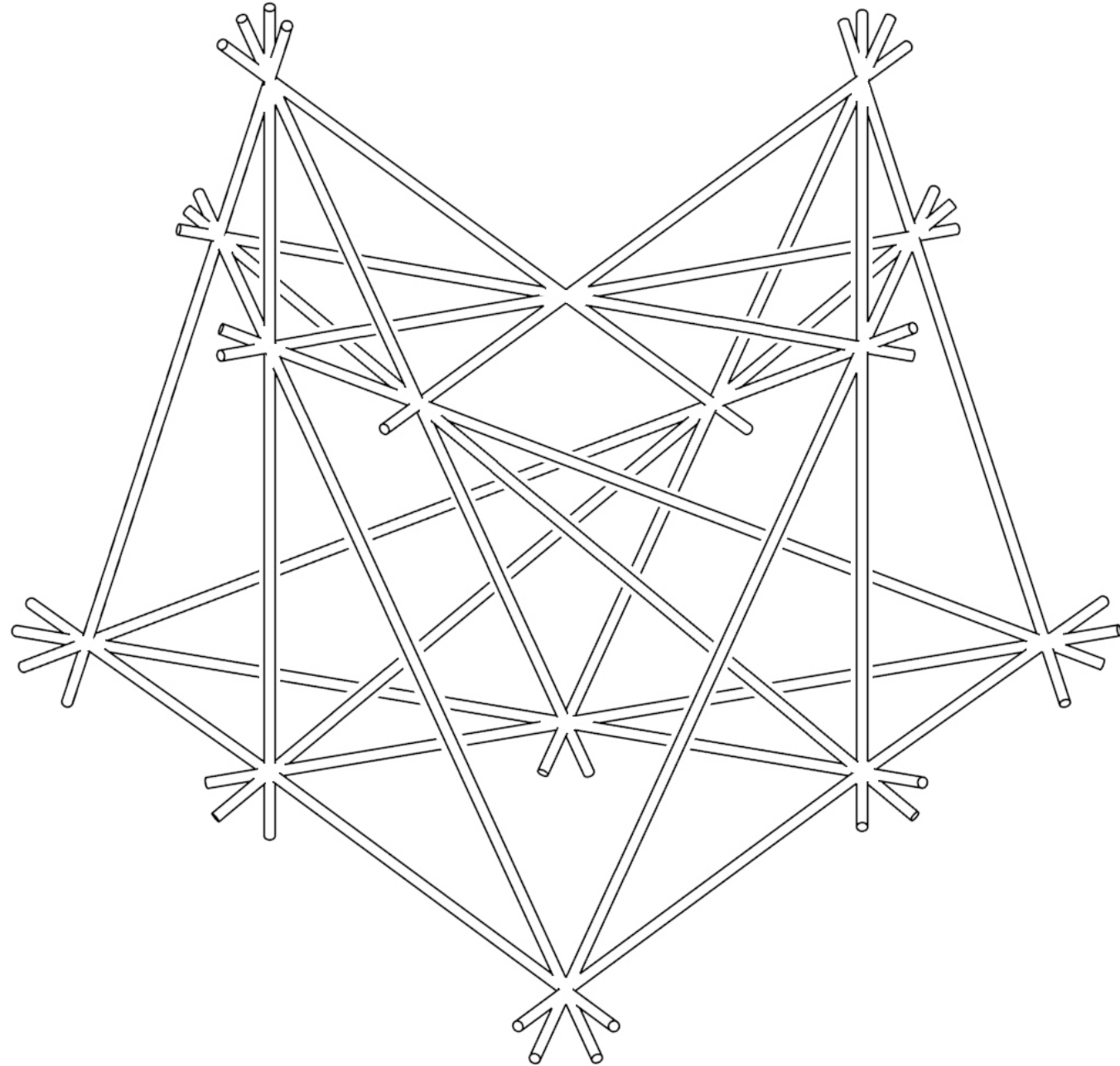
20 kpl läpinäkyviä akryyliputkia
sisähalkaisija 5mm, ulkohalkaisija 7mm, pituus 50cm



38 kpl puutikkuja
halkaisija 4mm, pituus 50cm

Kokoa kahdestakymmenestä akryyliputkesta viereisen kuvan mukainen rakennelma, jonka jokaisessa 15 risteyksessä kohtaa neljä putkea, ja jokainen putki kulkee kolmen risteyksen läpi.

- Käytä pieniä kumilenkkejä risteyksissä hakiessasi parasta asentoa putkille.
- Kiinnitä erityistä huomiota siihen millä tavoin putket ohittavat toisensa risteyksissä.
- Jokaisen putken tulisi olla täysin suorassa, ja toisiaan koskettavien putkien tulisi muodostaa mahdollisimman tiivis risteys.
- Liu'uttele ja säädä putkien asentoa rakennelmassa niin että kaikki risteykset ovat mahdollisimman etäällä naapureistaan, ja että rakennelman 'huoneet' ovat mahdollisimman selvästi piirtyviä.
- Kun olet löytänyt hyvän asennon rakennelmalle, korvaa pienet kumilenkit yksi kerrallaan läpinäkyvillä kuminauhan pätkillä.



Tarvitset 15 kpl pieniä kumilenkkejä



Tarvitset 15 kpl läpinäkyvän kuminauhan pätkiä
halkaisija 1mm, pätkän pituus noin 25cm



Tutki onko pujotteluun löydettävissä järjestelmällinen tapa tai sääntö, joka takaa parhaimman tuloksen?

Seuraavaksi maalaa 38 puutikkua esim. spraymaaleilla niin että saat:

3 kpl punaista tikkua

3 kpl oranssia tikkua

3 kpl keltaista tikkua

3 kpl vihreää tikkua

3 kpl sinistä tikkua

3 kpl violettia tikkua

10 kpl valkoista tikkua

10 kpl mustaa tikkua



Yllä on käytetty värejä Beltonin *Molotov Premium* -maalien sävyjä:

piglet pink, peach light, zinc yellow, calypso light, ice-blue dark, lavender, nature white, ja anthracite grey.

VALMIS RAKENNELMA:

Valmiilla putkirakennelmalla voit havainnollistaa työpajan sisältöjä luokkahuoneessa.

